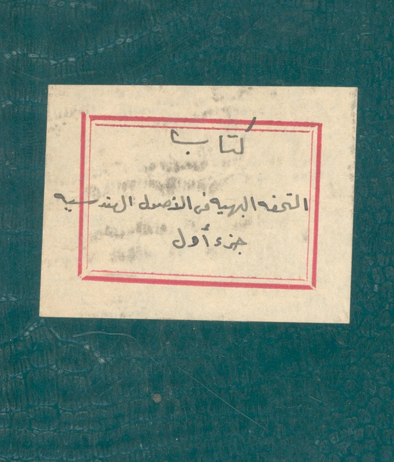
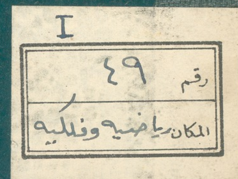

كتاب
التحفه البهيه فى الأصول الهندسيه
جزء أول



كتاب

التحفة البهية في الاصول الهندسية

تأليف

حضرة احمد بك نظيم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمه

الجزء الاول

وهو مقرر لتلامذة السنة الاولى التجهيزية

قررت نظارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب لتلامذة مدرسة التجهيزية

(الطبعة الثالثة)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحمية

سنة ١٨٩٢

افرنجيه



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله مبدع نظام الكائنات على محور الاستقامة والثبات والصلاة والسلام على نبينا قطب دائرة الكرة الكونيــة وعلى آله وأصحابه المتشكلين بأشكال أعماله السنية (وبعــد) فلما كانت مدرسة التجهيزية فى احتياج الى كتاب فى الاصول الهندسية على حسب البروجرام اعتنيت بجمعه فجاء بحمد الله على وفق المرام وجزأته الى أربعة أجزاء كل جزء منها لسنة من سنيها المكتبية وسميته (التحفة البهية فى الاصول الهندسية) ثم عنّ لى أن أزيده فوائد وأوشحه بطرف فرائد تحتاج اليها الفرقة التحضيرية من مدرسة المهندسخانة الخديوية فبرزتها بصور نجوم قبل السطور وبيده تعالى التوفيق وتسهيل الامور أسأله أن يعم نفعه وأن يحسن فى النفوس وقعه فى ظل من حسن التفاته للمعارف وأسدى لرعاياه كل تليد وطارف من هو بالثناء حقيق أفندينا (محمد باشا توفيق) متعه الله بأشباله الفخام وأنجاله الكرام

احمد نظيم
ناظر مدرسة دار العلوم
وقلم الترجمه

الجـــــزء الاول

من كتاب التحفة البهيـــة في الاصول الهندسـية

(وهو مقرر تلامذة السـنة الاولى التجهيزية)

فى الاشـــكال المستقيمة الاضلاع ومحيط الدائرة

البـاب الاول

(فى الاشـكال المستقيمة الاضـلاع)

الفصـــــل الاوّل

(فى المبادى)

(١) حجم الجسم عبارة عن المحل الذى يشغله من الفراغ

مهما كان صغر الجسم فانه لابد أن يكون له امتداد فى كل جهة من جهاته

ولا يعتـبر عادة الا فى ثلاث جهات أصلية يعـبر عنها بالابعاد وتسمى بالطول والعرض والارتفاع

غير أن الارتفاع يسمى عمقا أو سمكا على حسب مقتضيات الاحوال

(٢) وأوجه الجسم المحـددة له تسمى بالسـطوح فالسطح اذن ليس الا غلافا تصوّريا مجرّدا عن السمك أى لا يكون له غير بعدين فقط وهما الطول والعرض

(٣) وتقاطع السطوح يحدث عنه ما يسمى بالخطوط فالخطوط اذن مجرّدة عن السمك والعرض وليس لها سوى الطول

(٤) وتقاطع الخطين يحدث عنه ما يسمى بالنقطة فالنقطة لا امتداد لها

يطلق اسم الشكل على وجه العموم على كل من الاجسام والسطوح والخطوط

يقال للشكلين انهما متساويان متى أمكن انطباق أجزائهما على بعضها انطباقا تاما

(٥) الغرض من علم الهندسة دراسة خواص الاشكال

(٦) الخط المستقيم هو أقصر بعد بين نقطتين مثل المستقيم ا ب (شكل ١)
ويمكن تصور تولده من تحرك نقطة بحيث تتجه دائما
نحو نقطة أخرى ثابتة ومعينة

ش ١

ح ا ب ء

ويستدل من ذلك
أولا – انه هو عبارة عن مقدار مقاس البعد المحصور بين النقطتين ا و ب
ثانيا – انه يمكن تصور امتداده الى ما لانهاية له من جهتى النقطتين ا و ب نحو النقطتين ح و ء مثلا والمجموع لا يتكون منه الا مستقيم واحد وبناء عليه يمكن تعيين اتجاه أى مستقيم بعد معرفة نقطتين منه
ثالثا – ان المستقيمين لا يمكن أن يشتركا فى نقطتين أو فى جزء من مستقيم الا اذا اتحدا فى جميع امتدادهما
رابعا – انه لا يمكن أن يمد بين النقطتين ا و ب الا مستقيم واحد
(٧) والخط المنكسر هو ما تركب من جملة أجزاء من خط مستقيم ليست على استقامة واحدة مثل الخط ا ب ح ء (شكل ٢)

ش ٢

ب ء ح ا

(٨) والخط المنحنى ما ليس مستقيما ولا مركبا من خطوط مستقيمة مثل الخط ا ب (شكل ٣)
ويمكن تصور تولد هذا الخط من تحرك نقطة بحيث تتغير اتجاهها فى كل لحظة بدرجات غير محسوسة تابعة قانونا ما
وينتج من هذا التعريف أنه يمكن أن يمد بين النقطتين ا و ب خطوط منحنية لانهاية لعددها واذن فالخطوط ثلاثة مستقيم ومنكسر ومنحن

ش ٣

ب

(٩) السطح المستوى أو المستوى فقط هو السطح الذى ينطبق عليه المستقيم كمال الانطباق فى جميع جهاته
وحيث قد علم مما تقدم أنه لا يوجد الا نوع واحد من المستقيم فيعلم ضرورة
أولا – عدم تعدد نوع المستوى
ثانيا – انه يمكن تصور امتداد المستوى فى كل جهة من جهاته امتدادا غير نهائى والمجموع لا يتكون منه الا مستو واحد
ثالثا – ان المستقيم يمكن أن يمر به مستويات لانهاية لعددها
رابعا – ان كل مستقيم اشترك مع المستوى فى نقطتين انطبق عليه فى جميع امتداده

(١٠) ولنذكر هذه الفوائد الآتية

النظرية — هى قضية تؤول بواسطة البرهان الى البديهيات

الفائدة — هى نظرية معدة لتحضير برهان نظرية أخرى أهم منها

النتيجة — هى الثمرة المستخرجة من نظرية أو جملة نظريات

العملية — هى المسألة التى يراد حلها وجوابها يسمى حلا

العكس — هو قضية يكون فرضها نتيجة قضية أخرى ونتيجتها فرضا لتلك القضية

التنبيه — هو اشارة الى مفهوم يؤخذ من قضية أو جملة قضايا تقدمت

نظرية

(١١) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد لا اثنان

لتكن ا و ب و حـ النقط الثلاث (شكل ٤)

الاول — يمر بالمستقيم ا ب مستو نرمز له بحرف ع ثم يتصور دورانه حول هذا المستقيم حتى يصل الى نقطة حـ وبذلك يتعين وضعه

الثانى — اذا فرض امكان امرار مستو آخر عَ بالنقط الثلاث المذكورة وكانت م احدى نقطه فنصل بين م و ء احدى نقط المستقيم ا ب بمستقيم م ء بحيث يكون قاطعا للمستقيم ا حـ فمن حيث ان المستقيم م ء الموجود فى مستوى عَ مار بنقطتى هـ و ء من المستوى ع فيكون موجودا فيه بتمامه (٩ رابعا)

وينتج من ذلك

أولا — ان كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما مستو

ثانيا — ان كل مستقيم ونقطة خارجة عنه يتعين بهما مستو

ثالثا — انه يكفى لانطباق مستو على آخر أو جزأى مستويين على بعضهما اشتراكهما فى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

الفصـل الثـانى

(فى الـزوايا)

تعـاريف

(١٢) اذا تقاطع المستقيمان ا ب و ا ح فى نقطة ا (شكل ٥) فان جزء المستوى ح ا ب أى الانفـراج الواقع بينهـما يسمى زاوية ويسمى المستقيمان المذكوران المحددان لها بضلعى الزاوية وتسمى نقطة تلاقيهما ا برأس الزاوية

ش ٥

تقرأ الزاوية تارة بحرف الرأس وحده اذا كانت منفردة و بحروف ثلاثة بشرط أن يكون حرف الرأس فى الوسـط اذا اشـتركت فى الرأس مع زوايا أخرى

لا يرتبط مقدار أى زاوية بطول ضلعيها بل بالانفراج الواقع بينهما وعلى ذلك فالزاويتان المتساويتان هما اللتان ينطبق انفراجهما على بعضهما بدون نظر الى تفاوت طول الاضلاع

كل زاويتين مثـل ا ب ح , ح ب ى اشـتركتا فى ضلع واحد واتحـدتا فى الرأس يقـال لهما متجاورتان كما فى (شكل ٦)

ش ٦

يمكن ضم زاويتين أو أكثر الى بعضهما أو طرح زاوية من أخـرى فالزاوية ا ب ى = ا ب ح + ح ب ى والزاوية ح ب ى = ا ب ى ـ ا ب ح (شكل ٦)

(١٣) أنواع الزاوية ثلاثة قائمة وحادة ومنفرجة

فالزاوية القـائمـة هى احـدى الزاويتـين المتجـاورتين المتساويتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر مثل زاوية ا ب ى وزاوية ى ب هـ (شكل ٦)

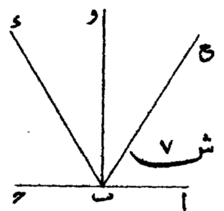
والزاوية الحادة هى ما كانت أصغر من القائمة مثل ا ب ح , ح ب ى

والزاوية المنفرجة هى ما كانت أكبر من الزاوية القائمة مثل زاوية ح ب هـ

(١٤) المسـتقيم المنصف لزاوية هو مسـتقيم يمر برأسها و يقسم الانفراج الواقع بين ضلعيها الى قسمين متساويين مثل المستقيم ب ح المنصف لزاوية ا ب ى (شكل ٦)

نظـــــرية

(١٥) كل نقطة مفروضة على مستقيم لا يمكن أن يمد منها الا مستقيم واحد يصنع معه زاويتين متجاورتين قائمتين (شكل ٧)



يمد لذلك من نقطة ب المستقيم ب ع فيصنع مع المستقيم اح زاويتين متجاورتين ا ب ع و ع ب ح فان كانتا متساويتين كان هو المستقيم المطلوب (١٣) والا يتصور نقل الزاوية الصغرى ا ب ع جهة الشمال فى الوضع ى ب ح بحيث تكون زاوية ا ب ع = زاوية ى ب ح

ثم يتصور مد من نقطة ب المستقيم ب و منصفا الزاوية ع ب ى فيكون هو المستقيم المطلوب وذلك لان زاوية ا ب ع = ى ب ح وزاوية ع ب و = و ب ى بالتنصيف وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما طرفا على طرف يحدث

ا ب ع + ع ب و = ى ب ح + و ب ى أو ا ب و = و ب ح

وحيث انهما متجاورتان وحادثتان من تلاقى مستقيم بآخر فتكون كل منهما قائمة (١٣)

ثم ان كل مستقيم يفرض خلاف ب و مثل ب ى لابد وأن يصنع مع المستقيم اح زاويتين متجاورتين مختلفتين أى غير قائمتين لان

زاوية ى ب ح = و ب ح ـ و ب ى و (١)

زاوية ى ب ا = و ب ا + و ب ى (٢)

وينتج من ذلك

أولا ـ ان الزوايا القائمة كلها متساوية

ثانيا ـ ان مجموع الزاويتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر يساوى زاويتين قائمتين لانه لو جمع المتساويتان (١) و (٢) السابقتان يحدث

ى ب ح + ى ب ا = و ب ح + و ب ا = ٢ ق

فاذا كانت احداهما قائمة تكون الاخرى كذلك

تنبيه ـ الزاويتان ى ب ح و ى ب ا يقال لهما متكاملتان والزاويتان ى ب ح و ى ب و يقال لهما متماميتان

ثالثا ــ ان مجموع الزوايا المجتمعة حول نقطة واحدة يساوى أربع زوايا قوائم أعنى أن

هـ و ا + ا و ب + ب و ح + ح و د + د و هـ = ٤ ق

(شكل ٨)

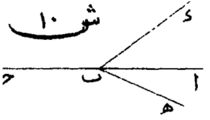
لانه لومد من نقطة و المستقيم م ن لكانت جميع هذه الزوايا بعضها فوق هذا المستقيم والبعض الآخر تحته وحيث ان مجموع الزوايا التى فوقه يساوى قائمتين وكذلك التى تحته فيكون مجموع الكل مساويا لاربع قوائم

رابعا ــ اذا أحدث مستقيم بتقاطعه مع آخر زاويتين متجاورتين قائمتين كان هذا الاخير مكونا أيضا مع الاوّل زاويتين متجاورتين قائمتين (شكل ٩)

أعنى اذا صنع المستقيم ح د بتقاطعه مع المستقيم ا ب الزاويتين ا هـ ح , ح هـ ب المتجاورتين القائمتين كان الزاويتان ا هـ ح , ا هـ د المتجاورتان الحادثتان من تقاطع المستقيم ا ب بالمستقيم ح د قائمتين أيضا وهو أمر ظاهر لانه حيث كانت احدى المتجاورتين ا هـ ح قائمة فتكون الاخرى كذلك (ثانيا)

نظـــــــــرية

(١٦) اذا كان مجموع أى زاويتين متجاورتين مساويا للقائمتين كان ضلعاهما المتطرفان على استقامة واحدة (شكل ١٠)



أعنى اذا كان ا ب د + د ب ح = ٢ ق يكون المستقيم ا ب على استقامة ب ح وذلك لانه لوفرض خلاف ماذكر وأن مستقيما آخر مثل ب هـ هو الذى على استقامة ب ح فانه يحصل بمقتضى ما تقدم (١٥ ثانيا) أن هـ ب د + د ب ح = ٢ ق وبمقارنة هذه المتساوية بالمتساوية المفروضة يعلم ان زاوية هـ ب د = ا ب د وهو محال وحينئذ فلابد أن يكون ب هـ منطبقا على ب ا

نظـــــرية

(١٧) اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين (شكل ١١) فالزاويتان اهح , دهب متساويتان لان كل واحدة منهما تكمل زاوية واحدة اهد وكذا الزاويتان اهد , حهب متساويتان لان كل واحدة منهما مكملة لزاوية واحدة اهح

ش ١١

عكس هذه النظرية حقيق أى اذا وجدنا فى جهتى المستقيم اب ان الزاويتين اهح , دهب المتقابلتين بالرأس متساويتان يكون المستقيم ده على استقامة هح لانه لو لم يكن كذلك لكان هو مثلا على استقامة حه وحينئذ يجب أن تكون زاوية وهب = زاوية دهب وهذا لا يتأتى الا اذا كان وه منطبقا على ده

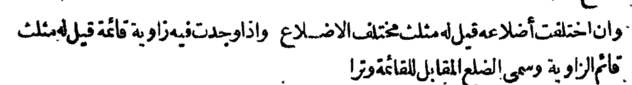
الفصـــــل الثـالث

(فى المثلثات)

(١٨) المثلث هو جزء المستوى المحدود بثلاثة مستقيمات متقاطعة مثنى (شكل ١٢) يتركب المثلث من ستة أشياء وهى ثلاث زوايا وثلاثة أضلاع فالزوايا هى ا و ب و ح ورؤسها هى رؤس المثلث والاضلاع هى اب و بح و اح ويرمز لها عادة بالرموز اَ و بَ و حَ لبيان انها مقابلة للزوايا ا و ب و ح

ش ١٢

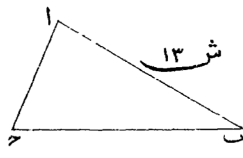
اذا تساوت الاضلاع الثلاثة من المثلث قيل له متساوى الاضلاع وان تساوى فيه ضلعان فقط سمى مثلثا متساوى الساقين ويسمى الضلع الثالث قاعدة له


وان اختلفت أضلاعه قيل له مثلث مختلف الاضلاع واذا وجدت فيه زاوية قائمة قيل له مثلث قائم الزاوية وسمى الضلع المقابل للقائمة وترا

نظـــــــرية

(١٩) أيّ ضلع من أيّ مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما (شكل ١٣) أعني أن

ب ح < اب + اح و ب ح > اب — اح



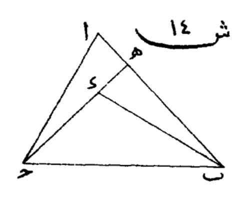
لاثبات ذلك يقال حيث كان ب ح مستقيما مارا بين النقطتين ب و ح فهو أصغر من كل خط منكسر مار بين النقطتين المذكورتين وبذلك يثبت أن ب ح < اب + اح وبمثله يكون اح < اب + ب ح و اب < اح + ب ح ثم يقال حيث كان اب < اح + ب ح فاذا طرحنا اح من طرفي هذه المتباينة يحدث

اب — اح < ب ح أو ب ح > اب — اح وهو المراد

نظـــــــرية

(٢٠) اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتي أحد أضلاعه بمستقيمين كان مجموع الضلعين الواصلين أصغر من مجموع الضلعين المحيطين بهما (شكل ١٤) أعني أن

د ب + د ح < اب + اح



وذلك لانه لو مدّ ح د على استقامته جهة د حتى يلاقي المستقيم اب في نقطة هـ لحدث بمقتضى النظرية السابقة أن

ح هـ < اهـ + اح أو ح د + د هـ < اهـ + اح

وكذلك يحدث من المثلث ب د هـ أن (١٩)

د ب < هـ ب + هـ د

فاذا ضم هاتان المتباينتان على بعضهما طرفا على طرف أعني جمع الطرف الاكبر على الطرف الاكبر والطرف الاصغر على الطرف الاصغر كان ضرورة مجموع الطرفين الاولين أكبر من مجموع الطرفين الآخرين ويحدث

د ح + د هـ + د ب < اهـ + اح + هـ ب + هـ د

وبطرح هـ د من طرفى المتباينة يحدث

د ح + د ب < ا هـ + ا ح + هـ ب أو

د ح + د ب < ا هـ + هـ ب + ا ح أو

د ح + د ب < ا ب + ا ح وهو المطلوب

تنبيه ــ من المعلوم أن هذه النظرية تكون حقيقية أيضا لو أخذت نقطة د على أحد أضلاع المثلث

نظـــــــرية

(٢١) فى كل مثلث متساوى الساقين الزاويتان المقابلتان لساقيه تكونان متساويتين (شكل ١٥) اذا كان ا ب = ا ح تكون زاوية ب = زاوية ح وللبرهنة على ذلك نضع بجانب المثلث ا ب ح عين المثلث مقلوبا فى الوضع أَ بَ حَ ثم نطبق الشكل أَ بَ حَ على الشكل ا ب ح بحيث نضع الزاويتين أَ و ا المتساويتين على بعضهما فتقع ضرورة نقطة حَ على ب ونقطة بَ على ح على مقتضى الفرض وحينئذ ينطبق حَ بَ على ب ح (٦ رابعا) و ينطبق الشكلان على بعضهما وتكون زاوية بَ = ح وحيث كانت بَ = ب فتكون زاوية ب = ح وهو المطلوب

نتيجـــة ــ ينتج من ذلك أن المثلث المتساوى الاضلاع يكون متساوى الزوايا

نظـــــــرية

(٢٢) وبالعكس اذا تساوت زاويتان من مثلث يتساوى الضلعان المقابلان لهما و يكون المثلث متساوى الساقين (شكل ١٥) فاذا كانت زاوية ب = زاوية ح يبرهن على أن الضلع ا ح = الضلع ا ب

لذلك يوضع بجانب المثلث ا ب ح عين المثلث مقلوبا فى الوضع أَ بَ حَ ثم نضع الشكل الثانى

على الاوّل بأن يطبق الضلع حَ بَ على مساويه ب ح وحيث ان زاوية حَ = ح = زاوية ب يأخذ الضلع حَ أَ الاتجاه ب ا وبعين هـذا السبب يأخذ الضلع بَ أَ الاتجاه ح ا واذن تنطبق نقطة أَ على نقطة ا وينطبق الشكلان على بعضهما انطباقاً تاماً ويكون أَ حَ = ا ب وحيث ان أَ حَ هو عين ا ح فيكون ا ح = ا ب وهو المطلوب

نتيجـــة ـ ينتج من ذلك أن المثلث المتساوى الزوايا يكون متساوى الاضلاع أيضا

نظـــــــــرية

(٢٣) المستقيم المنصف لزاوية المثلث المتساوى الساقين المحصورة بين ساقيه يمر بمنتصف قاعدته ويصنع معها زاويتين متجاورتين متساويتين (شكل ١٦)

اذا كانت زاوية ب ا ء = زاوية ء ا ح يبرهن أوّلا على أن ب ء = ء ح وثانيا على أن زاوية ب ء ا = زاوية ا ء ح

ش ١٦

لذلك يدوّر الشكل ء ا ح حول ا ء لانطباقه على ء ا ب فمن حيث ان زاوية ح ا ء = ء ا ب فرضا يأخذ الضلع ا ح الاتجاه ا ب وحيث كان المثلث متساوى الساقين تقع نقطة ح على نقطة ب ولكون نقطة ء ثابتة ينطبق ء ح على ء ب ويكون أوّلا ء ب = ء ح وثانيا زاوية ب ء ا = زاوية ح ء ا وهو المطلوب

تنبيه ـ المستقيم ا ء يسمى بالمستقيم المتوسط للمثلث المتساوى الساقين

نظـــــــــرية

(٢٤) يتساوى المثلثان اذا وجد فيهما واحد من الامور الآتية

أوّلا ـ اذا ساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بها النظائرها من الثانى

ثانيا ـ اذا ساوى من أحدهما ضلع ومجاورتاه من الزوايا لنظائرها من الثانى

ثالثا ـ اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لنظيره

الامر الاوّل ـ اذا كانت زاوية أَ = زاوية ا والضلع أَ بَ = الضلع ا ب والضلع أَ حَ = الضلع ا ح يبرهن على تساوى باقى الاجزاء المتناظرة فيهما (شكل ١٧) *

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق مماثلة للتى أجريت بنمرة ٢١ ينطبق المثلثان على بعضهما ويتساويان

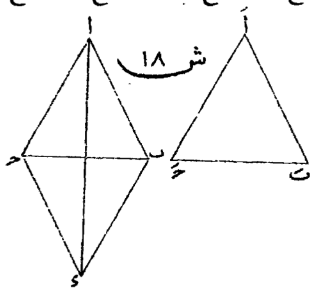
الامر الثانى ـ اذا كان الضلع اَ بَ = الضلع اب وزاوية اَ = زاوية ا وزاوية بَ تساوى زاوية ب يبرهن على تساوى الاجزاء الباقية منهما على التناظر (شكل ١٧)

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق مماثلة للتى أجريت بنمرة ٢٢ ينطبق المثلثان على بعضهما وتتساوى فيهما باقى الاجزاء المتناظرة ويكونان متساويين

(تنبيهان) الاول ـ ماذكرناه يقتضى أن الاشياء المفروض تساويها فى المنطوق تكون موضوعة على ترتيب واحد فاذا لم يكن الامر كذلك لزم ادارة المثلث اَ بَ حَ دورة كاملة قبل تطبيقه على الثانى

التنبيه الثانى ـ الزوايا المتساوية فى المثلثين المتساويين تقابل الاضلاع المتساوية فيهما

الامر الثالث ـ اذا كان الضلع اَ بَ = الضلع اب والضلع اَ حَ = الضلع اح والضلع بَ حَ = الضلع ب ح تتساوى الزوايا المتناظرة فيهما ويكون المثلثان متساويين (شكل ١٨)



للبرهنة على ذلك نضع المثلث اَ بَ حَ تحت المثلث اب ح مقلوبا فى الوضع بحيث يأخذ الضلع اَ بَ الوضع ب ء والضلع اَ حَ الوضع ح ء ثم نصل ا ء فالمثلث اب ء يصير اذن متساوى الساقين وبناء عليه تكون زاوية ء اب = زاوية ب ء ا (٢١) وكذلك المثلث ا ء ح يكون متساوى الساقين

ومنه ينتج أن زاوية ح ا ء = ح ء ا وبناء عليه تكون زاوية ب اح = زاوية ب ء ح ويكون المثلثان اب ح و ب ح ه متساويين لتساوى الضلعين اب و اح والزاوية المحصورة بينهما ب اح لنظائرها من الثانى (الاول) أما اذا تصادف وقوع المستقيم ا ء خارج الشكل اب ح ء بأن كان المثلثان منفرجى الزاوية فان الزاويتين ا و ء تكونان أيضا متساويتين لانهما تكونان فى هذه الحالة عبارة عن الفرقين الكائنين بين زوايا متساوية

نظرية

(٢٥) فى أى مثلث الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر وبالعكس (شكل ١٩)
أوّلا ـ اذا كانت زاوية حـ ا ب أكبر من زاوية ب
يكون الضلع حـ ب أكبر من الضلع احـ
لذلك يمدّ من نقطة ا المستقيم اد بحيث تكون الزاوية
د ا ب تساوى الزاوية ب فيكون الضلع اد = الضلع
د ب (٢٢) ويؤخذ من المثلث ا د حـ أن

ش ١٩

ا ب د حـ

احـ < اد + د حـ أو احـ < د ب + د حـ أو احـ < ب حـ أو ب حـ > احـ

ثانيا ـ اذا كان الضلع ب حـ أكبر من الضلع احـ تكون زاوية ا أكبر من زاوية ب
وللبرهنة على ذلك يقال لو لم تكن زاوية ا أكبر من زاوية ب لكانت إما مساوية لها أو أصغر
منها ففى الحالة الاولى يجب أن يكون الضلع ب حـ مساويا للضلع احـ (٢٢) وهو مخالف للفرض
وفى الحالة الثانية يجب أن يكون الضلع ب حـ أصغر من الضلع احـ (أوّلا) وهو مغاير أيضا للفرض
وبناء عليه يجب أن يكون الضلع ب حـ أكبر من الضلع احـ وهو المراد

نظرية

(٢٦) اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعى
المثلث الاول أكبر من نظيرتها من المثلث الثانى
يكون الضلع الثالث من المثلث الاوّل أكبر من
نظيره من المثلث الثانى (شكل ٢٠)
اذا كان الضلع ا ب = اَ بَ والضلع
احـ = اَ حـَ وكانت زاوية ا أكبر من
زاوية اَ يكون الضلع ب حـ > بَ حـَ

ش ٢٠

اَ ا د حـ هـ ب حـَ بَ

لذلك يرفع المثلث اَ بَ حـَ ويوضع على يسار المثلث ا ب حـ بحيث ينطبق الضلع اَ حـَ
على مساويه احـ ويأخذ المثلث الوضع ا حـ د ثم تنصف الزاوية الكلية ب ا د بالمستقيم
اهـ فيقع ضرورة داخل الزاوية الكبرى ب ا حـ ثم يوصل المستقيم د هـ فالمثلثان الحادثان
ا ب هـ و ا هـ د يكونان متساويين لان فيهما الضلع اهـ مشترك بينهما والضلع
ا ب = اَ بَ = اد والزاوية ب ا هـ = هـ ا د بالتنصيف (٢٤ الامر الاوّل)

وينتج من تساويهما أن الضلع ب هـ = هـ ء ويؤخذ من المثلث حـ هـ ء أن (١٩)
حـ ء أو بَ حـَ < ء هـ + هـ حـ أو < حـ ب وهو المراد

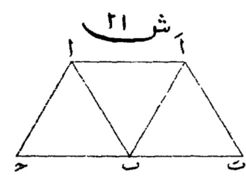
تنبيـــه — عكس هذه النظرية حقيق أعنى انه اذا كان ا ب = اَ بَ و ا حـ = اَ حـَ
و ب حـ > بَ حـَ تكون زاوية ب ا حـ > بَ اَ حـَ

لانه لولم يكن الامر كذلك لكانت زاوية ب ا حـ اما مساوية لزاوية اَ أو أصغر منها ففى الحالة الاولى يجب أن يكون الضلع ب حـ = بَ حـَ (٢٤ الامر الاول) وفى الثانية يجب أن يكون ب حـ < بَ حـَ (٢٦) وكلاهما مغاير للفرض فتكون اذن زاوية ب ا حـ > اَ وهو المطلوب

نظـــــــرية

(٢٧) مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين (شكل ٢١) أعنى ان

ا + ب + حـ = ٢ ق



وللوصول الى ذلك يمد المستقيم حـ ب على استقامته جهة ب ثم يتصور انزلاق المثلث ا ب حـ على امتداد المستقيم حـ ب الى أن تأخذ نقطة حـ محل النقطة ب ومن حيث ان الانزلاق حاصل فى آن واحد لجميع أجزاء المثلث لارتباطها ببعضها فان نقطة حـ عندما تصل الى الوضع ب تصل أيضا نقطة ب الى الوضع بَ على بعد من نقطة ب مساو للبعد ب حـ وكذا تصل نقطة ا الى الوضع اَ على بعـد منها مساو للبعد ب حـ ثم اذا وصل المستقيم ا اَ فالمثلث الحادث ا اَ ب يكون مساويا للمثلث الاصلى ا ب حـ لان فيهما الضلع ا ب مشترك بينهما والضلع اَ ب = الضلع ا حـ فرضا والضلع ا اَ = الضلع ب حـ وينتج من تساويهما أن زاوية اَ ب ا المقابلة للضلع ا اَ = زاوية ب ا حـ المقابلة للضلع ب حـ (٢٤ التنبيه الثانى) وحيث كانت زاوية ا ب بَ = زاوية حـ فرضا يكون مجموع الزوايا الثلاثة المتجاورة بَ ب اَ + اَ ب ا + ا ب حـ مساويا لمجموع زوايا المثلث الداخلة أى حـ + حـ ا ب + حـ ب ا وحيث كان المجموع الاول مساويا لزاويتين قائمتين (١٥ ثانيا) فيكون المجموع الثانى كذلك وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا — انه اذا مد أحد أضـلاع مثلث فان الزاوية الحادثة بين امتداده والضلع المجاور له مثل زاوية ا ب بَ تساوى مجموع زوايا المثلث ماعدا المجاورة لها

ثانيا – ان مجموع زوايا المثلث الخارجة الحادثة بين امتداد أضلاعه الثلاثة والاضلاع المجاورة لها يساوي أربع قوائم وذلك لان مجموع كل زاويتين متجاورتين موجودتين على كل رأس من رؤس المثلث الثلاثة مساو لقائمتين وحينئذ يكون مجموع الكل مساويا ٦ قوائم وبطرح مقدار الزوايا الداخلة أي قائمتين من ٦ قوائم يكون الباقي وهو مجموع الزوايا الخارجة فقط مساويا ٤ قوائم

ثالثا – ان مجموع الزاويتين الحادتين من المثلث القائم الزاوية يساوي زاوية قائمة واذن فهما تماميتان (١٥ تنبيه) فاذا كان المثلث متساوي الساقين كان مقدار كل واحدة منهما نصف زاوية قائمة

رابعا – انه اذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين اخريين من مثلث آخر تكون الزاوية الثالثة من الاول مساوية للثالثة من الثاني

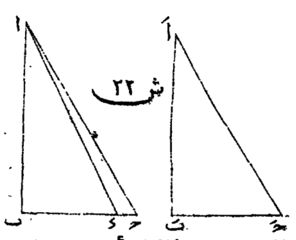
خامسا – انه لا يمكن أن يوجد في أي مثلث الا زاوية واحدة قائمة أو زاوية واحدة منفرجة

سادسا – ان مقدار كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الاضلاع ثلث قائمتين أو ثلثا قائمة

سابعا – انه يمكن الاكتفاء في تساوي المثلثات بتساوي ضلع واحد ومطلق زاويتين من أحدهما لنظائرها من الثاني وحينئذ فالمثلثان القائما الزاوية يتساويان اذا ساوى من أحدهما وتر وزاوية دون القائمة أو ضلع وزاوية دون القائمة لنظائرها من الثاني

نظـــــرية

(٢٨) يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا ساوى من أحدهما وتر وضلع لنظيريهما من الثاني (شكل ٢٢)



اذا كان الوتر ا ح = الوتر أَ حَ والضلع ا ب = الضلع أَ بَ يكون المثلثان القائما الزاوية ا ب ح , أَ بَ حَ متساويين

وللبرهنة على ذلك يرفع المثلث أَ بَ حَ ويطبق على المثلث ا ب ح بأن يوضع الضلع أَ بَ على مساويه ا ب وحيث ان زاوية بَ تساوي زاوية ب بالقيام يأخذ الضلع بَ حَ الاتجاه ب ح وتقع نقطة حَ على نقطة ح اذ لو فرض خلاف ذلك للزم أن تقع داخلا أو خارجا عنها فاذا فرض وقوعها في نقطة د فيكون أَ حَ منطبقا على ا د ويكون المثلث ا ح د

متساوى الساقين لان اح = اد وتكون اذن زاوية ح = زاوية ادح لكنه بالتأمل نرى أن زاوية ح حادّة لانها أصغر من قائمة (٢٧ ثالثا) وزاوية ادح الخارجة عن المثلث اب د منفرجة لانها أكبر من قائمة (٢٧ أوّلا) وتساويهما محال وما نتج هذا الامن فرض وقوع نقطة حَ داخل نقطة ح وبمثل ذلك يبرهن على عدم امكان وقوعها خارجا عنها وحينئذ لابد أن تقع عليها وينطبق المثلثان على بعضهما ويصيران متساويين وهو المطلوب

الفصـــــل الرابــع

(فى المستقيمات المتعامدة والمائلة)

(٢٩) المستقيم العمودى على آخر هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين ينتج من هذا التعريف ومما ذكر بنمرتى ١٥ و ٢٣ ما يأتى

أوّلا — ان من نقطة على مستقيم لا يمكن أن يقام الا مستقيم واحد عمودى عليه

ثانيا — ان كل مستقيم عمودى على آخر يكون الاخير عمودا عليه

ثالثا — ان المستقيم المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين يكون عمودا على قاعدته ويسمى ارتفاعه

(٣٠) المستقيم المائل على آخر هو يصنع معه زاويتين متجاورتين مختلفتين

نظـــــــرية

(٣١) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن ينزل منها عمود واحد عليه لا اثنان (شكل ٢٣)

وللبرهنة على ذلك يمد من نقطة ح المستقيم حد فيكوّن مع المستقيم اب زاويتين حدا , حدب ان كانتا متساويتين كان هو العمود المطلوب والا فنتصوّر تحرك المستقيم المذكور حول نقطة ح بحيث تبعد نقطة د شيأ فشيأ عن نقطة ا فيشاهد أن الزاوية الكبرى حدا تأخذ فى النقص وأن الزاوية الصغرى حدب تأخذ فى الزيادة وحينئذ فلابد وأن يوجد وضع للمستقيم المتحرك مثل حه تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين ويكون هو العمود المطلوب

هذا ولو استمر المستقيم المتحرك على الحركة بعد وصوله الى الوضع حـ هـ يشاهد أن التساوى الذى كان حاصلا بين الزاويتين المتجاورتين قد اختل ومن ذلك يعلم أنه لا يوجد للمستقيم المتحرك الاوضع واحد فريد تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين وهو المطلوب

نظـــــــرية

(٣٢) اذا أنزل من نقطة خارج مستقيم عمود عليه وعدّة موائل يحدث (شكل ٢٤)

أوّلا ـ ان العمود أصغر من كل مائل

ثانيا ـ ان المائلين المتساويى البعد عن موقع العمود يكونان متساويين

ثالثا ـ ان المائل الذى افترق عن موقع العمود ببعد أكبر فهو أكبر

الامر الاوّل ـ يبرهن على أن العمود د ب < المائل د هـ

ولذلك يمد العمود د ب على استقامته جهة ب ويؤخذ منه البعد ب ط = البعد د ب ويوصل هـ ط فالمثلث الحادث هـ ب ط يكون مساويا للمثلث د ب هـ لوجود الضلع ب هـ مشتركا بينهما ولتساوى الضلع ب ط للضلع ب د عملا ولمساواة الزاوية ط ب هـ للزاوية هـ ب د بالقيام وينتج من تساويهما ان الضلع هـ ط = الضلع د هـ لكنه يؤخذ من المثلث د هـ ط أن (١٩)

د ط أو د ب + ب ط < د هـ + هـ ط أو ٢ د ب < ٢ د هـ أو د ب < د هـ

الامر الثانى ـ اذا كان البعد ب و = البعد ب هـ يبرهن على ان المائل د و يساوى المائل د هـ

ولذلك يقال ان المثلثين د ب هـ و د ب و متساويان لاشتراك الضلع د ب فيهما ولمساواة البعد و ب للبعد ب هـ فرضا ولمساواة الزاوية د ب و للزاوية د ب هـ بالقيام ومن تساويهما ينتج ان المائل د و يساوى المائل د هـ

الامر الثالث ـ اذا كان البعد ب ع أكبر من ب و يبرهن على أن المائل د ع أكبر من د و لذلك يوصل المستقيمان و ط و ع ط ويبرهن كما سبق على أن و ط = و د و ع ط = ع د وحيث كانت نقطة و داخل المثلث د ع ط يحدث (٢٠)

و ط + و د < ع ط + ع د أو ٢ د و < ٢ د ع أو د و < د ع وهو المطلوب

تنبيه ــ اذا وجد المائلان ءهـ و ءح فى جهتى العمود فانه يؤخذ البعد ب و يساوى البعد ب هـ فيكون المائل ء و = ء هـ ويبرهن كما سبق

(نتيجة ١) عكس القضايا السابقة حقيقى ويسهل البرهنة عليه

(نتيجة ٢) من نقطة خارجة عن مستقيم لا يمكن أن يمد اليه سوى مستقيمين متساويين

فائدة ــ العمود الفريد الذى يمكن مده من نقطة الى مستقيم يقدر به بعد هذه النقطة عن هذا المستقيم

الفصل الخامس

(فى المحل الهندسى)

(٣٣) المحل الهندسى هو المحل الجامع لجميع النقط المتحدة الخاصية أو التابعة لقانون واحد وهو اما أن يكون مستقيما أو منحنيا أو سطحا مستويا أو منحنيا ولا نتكلم الا على الخط المستقيم منها وما عداه يأتى الكلام عليه فى محله

نظرية

(٣٤) اذا أقيم عمود على وسط مستقيم محدود فكل نقطة من نقط هذا العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتى المستقيم وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين من نهايتى المستقيم وأطولهما ما كان قاطعا للعمود (شكل ٢٥)

الاول ــ اذا كان حء عمودا على وسط اب يبرهن على أن البعد ءب = البعد ءا ولذلك يقال حيث كان المستقيمان ءب و ءا مائلين متساويى البعد عن موقع العمود ءح فيكونان متساويين (٣٢ الثانى)

الثانى ــ يطلب البرهنة على أن هـا > هـب ولذلك يوصل وب فيكون وب = وا (الاول) وحيث ان المثلث هـب و يؤخذ منه ان هـب < هـو + ب و (١٩) فلو وضعنا بدلا عن ب و ما يساويه وهو ا و ينتج أن

هـب < هـو + وا أو هـب < هـا أو هـا > هـب وهو المطلوب

نتيجة ــ كل مستقيم تكون جميع نقطه متساوية البعد عن نهايتى مستقيم معلوم يلزم أن يكون عمودا على وسطه

نظـــــــــــرية

(٣٥) اذا نصفت زاوية بمستقيم تكون كل نقطة من نقطه على بعدين متساويين من ضلعيها وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين منهما وأطولهما القاطع للمستقيم المنصف (شكل ٢٦)

الاول ـ يطلب البرهنة على أن البعد هل = البعد هم ولذلك يقال ان المثلثين ب ل ه و ب ه م القائمي الزاوية متساويان لوجود الوتر ب ه مشتركا فيهما ولمساواة الزاوية ل ب ه للزاوية ه ب م فرضا (٢٧ سابعا) وينتج من تساويهما أن ه ل = ه م

الثانى ـ يبرهن على أن البعد و ك > و ع ولذلك ينزل العمود ى ط فيكون مساويا ى ك (الاول) فاذا وصل و ط تحصل و ط < و ى + ى ط أو و ط < و ك وحيث كان و ع عمودا على ب ح فيكون أصغر من المائل و ط وعليه يكون و ع < و ك أو و ك > و ع

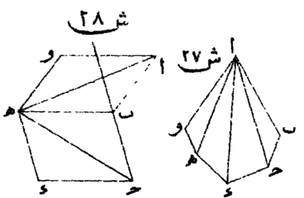
(نتيجة ١) كل مستقيم مار بين ضلعي زاويه وكانت كل نقطة من نقطه على بعدين متساويين من ضلعيها يكون منصفا لها

(نتيجة ٢) المستقيمان المنصفان لزاويتين متكاملتين يكونان متعامدين

الفصـــــــــل السادس

(فى الاشكال المحـــدبة)

(٣٦) السطوح المستوية المحددة بجملة مستقيمات متقاطعة مثنى تسمى أشكالا كثيرة الاضلاع أو مضلعات مستوية وأبسط هذه الاشكال هو المثلث وماله أربعة أضلاع يسمى شكلا رباعيا وماله خمسة يسمى خماسيا وماله عشرة أضلاع يسمى ذا العشرة الاضلاع وهكذا فالشكل ا ب ح ى ه و (شكل ٢٧) يدل على شكل سداسي جميع زواياه بارزة أى فتحاتها داخل الشكل وأما (الشكل ٢٨) فانه يدل على شكل



سداسى احدى زوايا داخلة بمعنى أن انفراجها خارج الشكل فالشكل الاول يسمى شكلا محدبا والثانى غير محدب

فالشكل المحدب هو الذى اذا مدّ أى ضلع من أضلاعه يجعل الشكل كله فى احدى جهتيه بخلاف الشكل الغير المحدب فانه اذا مدّ منه الضلع ح ب مثلا على استقامته فانه يقسم الشكل الى جزأين كل جزء منهما فى جهة من جهتيه

(٣٧) المستقيمات اهـ ، اى ، اح الواصلة بين رؤس زوايا الشكل الغير المتجاورة تسمى أقطار الشكل فالمثلث ليس له أقطار والشكل الرباعى له اثنان والخماسى له خمسة والسداسى له تسعة وعلى العموم اذا رمزنا بحرف ن الى عدد أضلاع شكل ما كان عدد أقطاره مساويا $\frac{ن (ن - ٣)}{٢}$

وذلك لان الشكل الذى عدد أضلاعه ن يتولد عنه أقطار واصلة من رأسه عددها ن — ٣ وبضرب هذا المقدار فى عدد الزوايا يتوصل الى العدد ن (ن — ٣) الا أنه يشاهد أن كل قطر منها محسوب مرتين واذن فبقسمة المقدار السابق على ٢ يتوصل الى $\frac{ن (ن - ٣)}{٢}$ وهو يدل على مقدار الاقطار التى يمكن وجودها فى أى شكل فهو اذن القانون العمومى الذى يعرف منه مقدار أقطار أى شكل فأقطار الشكل ذى العشرين ضلعا هى

$$\frac{٢٠ (٢٠ - ٣)}{٢} = ١٧٠ \text{ قطرا}$$

نظـــــرية

(٣٨) مجموع الزوايا الداخلة لاى شكل كثير الاضلاع يساوى من القوائم بقدر عدد أضلاعه الا اثنين مضروبا فى اثنين

وللبرهنة على ذلك نوصل أقطاره الخارجة من رأس واحدة (شكل ٢٧) فينقسم بذلك الشكل الى مثلثات بقدر عدد اضلاعه الا اثنين لان كل ضلع من أضلاع الشكل مرسوم عليه مثلث ماعدا الضلعين المحيطين برأسه وحيث انه تقدم بنمرة ٢٧ أن مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين فيحتوى الشكل اذن على قوائم بقدر ضعف عدد المثلثات أو بقدر عدد أضلاعه الا اثنين مضروبا فى اثنين فاذا جعل ن رمزا لعدد أضلاع الشكل تحصل هذا القانون (ن — ٢) ٢ وهو المطلوب

نتيجة — ينتج مما ذكر أن مقدار الزوايا القائمة الموجودة فى أى شكل رباعى مساوية الى (٤ — ٢) ٢ = ٤ أى أربع قوائم وزوايا الشكل الخماسى تعادل ست قوائم والسداسى ثمانية وهكذا

نظـــــرية

(٣٩) اذا مدت أضلاع أى شكل مهما كان عددها فى جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة المتكونة من كل ضلع وامتداد الضلع المجاور له مساويا أربع قوائم (شكل ٢٩)

والبرهنة على ذلك يلاحظ أنه باضافة كل زاوية خارجة مثل أ أ ب الى مجاورتها يتحصل من مجموعهما زاويتان قائمتان وأن هذا المجموع مكرر مرات بقدر عدد الاضلاع أعنى ان مجموع الزوايا الداخلة للشكل والخارجة عنه مساو من القوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه فاذا طرح من هذا المجموع مقدار مجموع الزوايا القائمة الموجودة فى زوايا الشكل الداخلة المساوية الى ضعف عدد أضلاعه الا اثنين كان الباقى وهو ٢ × ٢ أو ٤ قوائم يدل على مجموع الزوايا القائمة المشتمل عليها مجموع الزوايا الخارجة وهو المراد

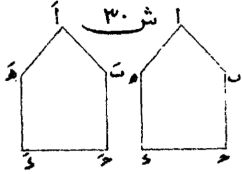
نتيجة ـ أى شكل كثير الاضلاع لا يمكن أن يحتوى على أكثر من ثلاث زوايا حادة لانه لو احتوى على أكثر من ذلك لوجد فى زواياه الخارجة أربع زوايا بالاقل يكون مجموعها أكبر من أربع قوائم وهو محال

تعـــــريف

(٤٠) كثيرا الاضلاع المتحدان فى عدد الاضلاع يكونان متساويين اذا تركبا من مثلثات متساوية متحدة العدد ومتشابهة وضعا أعنى اذا وضع أحدهما على الآخر انطبق عليه انطباقا تاما

نظـــــرية

(٤١) يتساوى كثيرا الاضلاع المتحدان فى عدد الاضلاع اذا تساوت منهما الاضلاع والزوايا المتناظرة بقطع النظر عن معرفة تساوى ضلع والزاويتين المجاورتين له من أحدهما لنظائرها من الثانى (شكل ٣٠)



مثلا اذا ساوت الزوايا أ و ب و ح من كثير الاضلاع أ ب ح ء ه نظائرها على الترتيب أَ و بَ و حَ من كثير الاضلاع أَ بَ حَ ءَ هَ المتحد مع الاول فى عدد الاضلاع وكانت الاضلاع

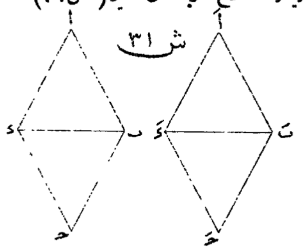
اب و بح و حء من الاول مساوية على الترتيب لنظائرها اَبَ و بَحَ و حَءَ من الثانى بقطع النظر عن معرفة تساوى الضلع ءه لنظيره ءَهَ وعن تساوى الزاويتين ء و ه المحيطتين بالضلع الاول لنظائرهما ءَ و هَ من الثانى يلزم أن يكون كثيرا الاضلاع متساويين

وللبرهنة على ذلك نضع كثير الاضلاع الثانى على الاول بحيث ينطبق الضلع اَهَ على مساويه اه ومن تساوى الزاوية اَ لنظيرتها ا ينطبق الضلع اَبَ على مساويه اب وتقع النقطة بَ على ب ولتساوى الزاوية بَ لنظيرتها ب يقع الضلع بَحَ على مساويه بح وتقع نقطة حَ على نقطة ح وكما ذكر ينطبق الضلع حَءَ على حء وحيث ان نهايتى الضلع ءَهَ قد انطبقتا على نهايتى الضلع ءه فينطبق الشكلان على بعضهما انطباقا تاما ويكونان متساويين

تنيجة ـ ينتج من ذلك ان كثير الاضلاع الذى عدد أضلاعه ن يتعين تعيينا تاما اذا علم منه معالم قدرها ٢ ن ـ ٣ وذلك لانه يحتاج الى معالم من أضلاعه قدرها ن ـ ١ ومن زواياه قدرها ن ـ ٢ وحينئذ فالمثلث يتعين بمعالم قدرها ٢ × ٣ ـ ٣ = ٣ أى ثلاثة معالم والشكل الرباعى بخمسة والخماسى بسبعة وهكذا

نظـــــــرية

(٤٢) يتساوى الشكلان الرباعيان اذا تساوى فيهما زاوية والاضلاع الاربعة كل لنظيره (شكل ٣١)



مثلا اذا فرض فى الشكلين الرباعيين ابحء و اَبَحَءَ ان زاوية ا = زاوية اَ والضلع اب = اَبَ والضلع بح = الضلع بَحَ والضلع حء = الضلع حَءَ والضلع ءا = الضلع ءَاَ يكونان متساويين

وللبرهنة على ذلك يمد القطران بء و بَءَ فيحدث من ذلك المثلثان ابء و اَبَءَ المتساويان لتساوى زاويه والضلعين المحيطين بها من أحدهما النظائرها من الثانى و ينتج من تساويهما تساوى الضلع بء للضلع بَءَ وحينئذ يكون المثلثان بءح و بَءَحَ متساويين لتساوى أضلاعهما المتناظرة فيهما و بناء عليه يكون الشكلان الرباعيان متساويين لتركبهما من مثلثات متساوية متحدة العدد ومتماثلة وضعا

الفصل السابع

(فى المستقيمات المتوازية)

(٤٣) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان موجودان فى مستو واحد ولا يمكن تلاقيهما مهما امتدا

فاذا فرض مستقيم مثل اب (شكل ٣٢) وأقيم من احدى نقطه ح عمود عليه ح ل ومد من نقطة ى احدى نقط هذا العمود المستقيم ى هـ بحيث يكون قاطعا للمستقيم اب فالزاويتان الحادثتان ح ى هـ , ح هـ ى من المستقيم القاطع ى هـ والمستقيمين ح ى و اب مجموعهما يساوى قائمة (٢٧ ثالثا) اذا تقرر هذا وفرض تحريك المستقيم ى هـ حول نقطة ى بحيث تبعد نقطة هـ شيأ فشيأ عن نقطة ح يشاهد ازدياد الزاوية ح ى هـ مع نقصان تماميتها ح هـ ى فاذا استمر المستقيم المتحرك فى حركته فانه لابد أن يأتى له وضع مثل ى و تكون فيه زاوية ح ى و قائمة لكن هذا لا يتأتى الا اذا انعدمت زاوية ح هـ ى كلية بواسطة تباعد نقطة هـ عن نقطة ح الى غير نهاية وحينئذ فيقال للمستقيمين فى هذه الحالة انهما متوازيان

ويمكن اعادة ماذكر بخصوص وضع المستقيم ى هـ حينما يكون على يمين المستقيم ى ح واذن فكل مستقيم مار بنقطة ى وصانع مع ى ح زاوية دون القائمة فى احدى جهتيه يمكن اعتباره كأنه أحد أوضاع المستقيم المتحرك ى هـ قبل وصوله الى الوضع النهائى ع ى أعنى انه لابد أن يصنع امتداده مع المستقيم اب زاوية تكون تمامية للزاوية التى يصنعها مع العمود ى ح وحينئذ فيقال على وجه العموم انه اذا اقيم عمود على مستقيم من احدى نقطه ومد من نقطة أخرى منه مائل عليه فان المائل اذا امتد يقطع العمود

نظرية

(٤٤) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن يمد منها مستقيم واحد مواز له لا اثنان (شكل ٣٣)

برهان الاول ينزل من نقطة ى العمود ى ح على المستقيم ا ب ثم يقام من نقطة ى العمود ى و على المستقيم ى ح فيكون ى و موازيا الى ا ب (٤٣)

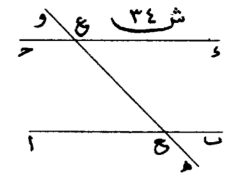
وبرهان الثانى يقال لو امكن مد مستقيم آخر ى هـ موازيا للمستقيم ا ب فمن حيث ان المستقيم ى و عمود على ى ح فيكون ى هـ مائلا عليه وبامتداده يقطع المستقيم ا ب (٤٣) واذن فلا يكون موازيا له

(نتيجة ١) المستقيمان العمودان على مستقيم ثالث متوازيان

(نتيجة ٢) المستقيم العمودى على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودا على الثانى لانه ان لم يكن هذا الثانى عمودا لكان مائلا عليه وحينئذ اذا امتد قطع الموازى له وهو محال

(نتيجة ٣) المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان لانه ان لم يكون كذلك لتلاقيا فى نقطة ومن هذا ينتج امكان مرور مستقيمين موازيين لمستقيم ثالث من نقطة واحدة وهو محال

(٤٥) اذا قطع مستقيم مستقيمين (شكل ٣٤) تكون من التقاطع ثمان زوايا متساوية مثنى لحصول التقابل بالرؤس فاذا اعتبرنا تلك الزوايا بالنسبة لوضع المستقيمين سميت أربعة منها داخلة والاربعة الباقية خارجة



واذا اعتبرت بالنسبة للقاطع سميت متبادلة داخلة أو متبادلة خارجة أو متناظرة أو مجاورة داخلة أو مجاورة خارجة

ولتوضيح تلك التسمية نقول

أولا ـ الزاويتان المتبادلتان الداخلتان هما مثل الزاويتين ح ع ع , ب ع ع والزاويتين ى ع ع , ا ع ع

ثانيا ـ الزاويتان المتبادلتان الخارجتان هما مثل الزاويتين ح ع و , ب ع هـ والزاويتين ى ع و , ا ع هـ

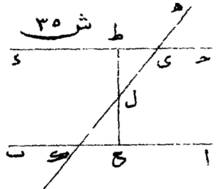
ثالثا ـ الزاويتان المتناظرتان هما مثل الزاويتين و ع ى , ع ع ب والزاويتين و ع ح , ع ع ا والزاويتين ى ع هـ , ب ع هـ والزاويتين ح ع هـ , ا ع هـ

رابعا ـ الزاويتان المجاورتان للقاطع الداخلتان هما مثل الزاويتين ح ع هـ , ا ع ع والزاويتين ى ع ع , ب ع ع

خامسا ــ الزاويتان المجاورتان للقاطع الخارجتان هما مثل الزاويتين و ع ى و ب ح هـ والزاويتين ح ع و ، ا ح هـ

نظـــــرية

(٤٦) اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فالزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتان (شكل ٣٥)



وبرهان ذلك ننصف البعد ى ك بنقطة ل ثم ننزل منها العمود ل ع على المستقيم ا ب ويمد على استقامته فيكون ضرورة عمودا على ح ى (٤٤ نتيجة ٢) فالمثلثان القائما الزاوية الحادثان يكونان متساويين لان فيهما الوتر ى ل = الوتر ل ك عملا والزاوية ى ل ط = الزاوية ع ل ك لتقابلهما بالرؤس وينتج من تساويهما (٢٧ سابعا) ان الزاوية ل ى ط = الزاوية ع ك ل وهو المطلوب

تنبيـــه ــ بناء على ما تقدم تسهل البرهنة على تساوى الزوايا المتبادلة الخارجة والمتناظرة وعلى تكامل الزوايا المجاورة للقاطع الداخلة والخارجة

نظـــــرية

(٤٧) اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين يكون المستقيمان متوازيين (شكل ٣٦) أى اذا كانت زاوية ى ع ط = زاوية ا ط ع يكون المستقيم ح ى موازيا للمستقيم ا ب

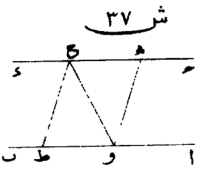
والبرهنة على ذلك يقال لو فرض أن ح ى غير مواز للمستقيم ا ب بل ان الموازى له مستقيم آخر مثل ع ل لكانت زاوية ل ع ط = زاوية ا ط ع = ى ع ط وهو محال لان زاوية ل ع ط جزء من زاوية ى ع ط ومانشأ هذا الامن فرض أن الموازى للمستقيم ا ب هو غير ح ى وهو المطلوب

(تنبيه ١) يبرهن بمثل ذلك على توازى المستقيمين المذكورين اذا كانت الزوايا المتبادلة الخارجة متساوية أو كانت الزوايا المتناظرة كذلك أو كانت الزوايا المجاورة للقاطع داخلة أو خارجة مكملة لبعضها مثنى

(تنبيه ٢) من المعلوم انه اذا لم يتوفر شرط من الشروط السابقة فلا يكون المستقيمين متوازيين

نظـــــــرية

(٤٨) المستقيمات المتوازية المحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية (شكل ٣٧)
أعنى ان المستقيمين هـ و , ح ط المتوازيين المحصورين بين المستقيمين أ ب , هـ د المتوازيين أيضا يكونان متساويين



وللبرهنة على ذلك يمد المستقيم ح و فالمثلثان الحادثان هـ و ح , ح و ط يكونان متساويين لان الضلع ح و مشترك فيهما ولان زاوية هـ و ح = زاوية و ح ط لكونهما متبادلتين داخلتين بالنسبة للمستقيمين المتوازيين هـ و , ح ط وللقاطع ح و (٤٦) ولان زاوية هـ ح و = زاوية ح و ط لكونهما متبادلتين داخلتين أيضا بالنسبة للمستقيمين ا ب , حـ د المتوازيين ولعين القاطع ح و وينتج من تساويهما ان الضلع هـ و = الضلع ح ط وهو المراد

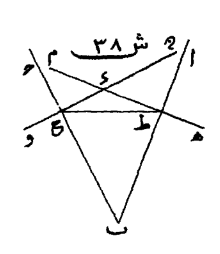
نتيجـــة ـ اذا كان المستقيمان المتوازيان هـ و , ح ط عمودين على كلا المستقيمين المتوازيين فيكونان متساويين أيضا لانهما يصيران متوازيين ولما كان العمود المحصور بين المتوازيين يقدر به البعد المحصور بينهما أمكن أن يقال على وجه العموم ان المستقيمين المتوازيين هما على أبعاد متساوية فى جميع امتدادهما

تنبيه ـ عكس هذه النظرية حقيقى دائما أعنى انه اذا كان المستقيمان هـ و , ح ط متساويين ومتوازيين يكون المستقيمان ا ب , حـ د الحاصران لهما متوازيين (شكل ٣٧) وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين هـ و ح , و ح ط متساويان لان الضلع ح و مشترك فيهما والضلع هـ و = ح ط فرضا وحيث انهما متوازيان والمستقيم ح و قاطع لهما تكون الزاويتان المتبادلتان هـ و ح , ح و ط متساويتين وينتج من تساويهما ان زاوية هـ ح و = زاوية ح و ط وحيث ان هاتين الزاويتين هما متبادلتان داخلتان يكون المستقيمان ا ب , حـ د متوازيين (٤٧)

تنبيـــه ـ اذا كان المستقيمان هو و ح ط المتساويان والمتوازيان عمودين على أحد المستقيمين المفروضين فيكونان ضرورة عمودين على الثانى وحينئذ يمكن أن يقال ان كل مستقيمين على أبعاد متساوية فى جميع امتدادهما يكونان متوازيين

نظـــــرية

(٤٩) المستقيمان العمودان على ضلعى زاوية لا يكونان متوازيين (شكل ٣٨)

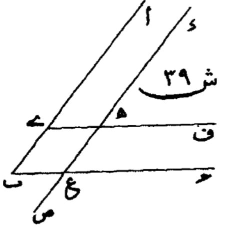


اذا فرضت زاوية ا ب ح وكان المستقيم م ه عمودا على الضلع ا ب و ى و عمودا على ح ب فلا يكون المستقيمان م ه و ى و متوازيين وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم ح ط فمن حيث ان كل واحدة من الزاويتين م ط ح و ى ح ط دون القائمة فيكون مجموعهما أقل من قائمتين وحينئذ فلا يكون م ط موازيا ى ح (٤٧ تنبيه ٢) وهو المراد

نظـــــرية

(٥٠) الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية تكونان اما متساويتين أو مكملتين لبعضهما فتكونان متساويتين اذا كانت أضلاعهما المتناظرة متحدة الجهة مثنى أو متضادتها كذلك وتكونان مكملتين لبعضهما اذا كان غير ذلك

(شكل ٣٩)



فالزاويتان ا ب ح و ى ه ف اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتحدة الجهة مثنى تكونان متساويتين وذلك لانه لو مد المستقيم ى ه على استقامته حتى يقابل المستقيم ح ب فى نقطة ع لكانت زاوية ه ع ح = زاوية ب بالتناظر وتساوى زاوية ى ه ف أيضا وحينئذ تكون زاوية ى ه ف = زاوية ب

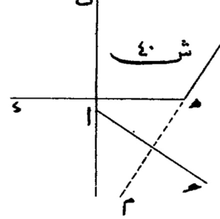
والزاويتان ے ه ص و ا ب ح اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتضادة فى الجهة مثنى تكونان متساويتين

لان زاوية ے ه ع = زاوية ى ه ف = زاوية ب

وأما الزاويتان د هـ ے ، ا ب ح اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية واثنان منها متحدان فى الجهة والاثنان الآخران متضادان فيها تكونان متكاملتين
لان زاوية د هـ ے مكملة لزاوية د هـ ف أو لمساويتها ا ب ح وهو المطلوب
نتيجـــة ـ اذا تعذر معرفة الزاوية الواقعة بين مستقيمين لعـدم تقاطع ضلعيها على ورق الرسم وأريد معرفة الزاوية المذكورة فانه تؤخذ نقطة بين ضلعى الزاوية المذكورة ويرسم منها مستقيمـان موازيان لضلعيها فالزاوية الحادثة بينهما تكون مساوية للزاوية المطلوب معرفتها

نظـــــــرية

(٥١) الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متعامدة تكونان اما متساويتين أو مكملتين لبعضهما (شكل ٤٠)



اذا فرضنا أن المستقيم د هـ عمود على ا ب والمستقيم و هـ عمود على ا ح تكون الزاويتان د هـ و ، د هـ م احداهما مساوية لزاوية ا والاخرى مكملة لها
والبرهنـــة على ذلك يتصور دوران الزاوية د هـ و حول نقطة هـ بمقـدار زاوية قائمة وبدون تغير مقـدارها فالوضعان الاخيران اللذان يأخذهـما المستقيمـان د هـ ، هـ و يكونان عمودين على وضعيهما الاولين وحينئذ يكونان موازيين للمستقيمين ا ب ، ا ح وتكون الزاوية الحادثة بينهما اما مساوية لزاوية ا أو مكملة لها (٥٠) وهو المراد
تنبيـــه ـ يؤخذ من هذه النظرية والسابقـة عليها أن المثلثين اللذين أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة تكون زواياهما المتناظرة متساوية فقط
فاذا رمزنا لزوايا المثلثين المتناظرة أى المحصورة بين الاضلاع المتوازية المتناظرة أو المتعامدة كذلك بحروف ا ، اَ ، ب ، بَ ، ح ، حَ نقول انه لا يمكن أن يفرض بين هـذه الزوايا سوى أحد هذه الامور الثلاثة وهى

(١) ا + اَ = ٢ ق ، ب + بَ = ٢ ق ، ح + حَ = ٢ ق
(٢) ا + اَ = ٢ ق ، ب + بَ = ٢ ق ، ح = حَ
(٣) ا = اَ ، ب = بَ ، ح = حَ

أما الامران الاولان فهما باطلان لانه ينتج من كل منهما ان مجموع زوايا المثلثين أكبر من ٤ قوائم وحينئذ يكون الثالث حقيقيا

الفصـــل الثــامن

(فى الاشكال المتوازية الاضــلاع)

(٥٢) شبه المنحرف هو شكل رباعى فيه ضلعان متوازيان فقط يسميان قاعدتيه مثل ا ب حـ ء (شكل ٤١)

(٥٣) متوازى الاضــلاع هو شــكل رباعى أضــلاعه المتقابلة متوازية مثــل ا ب حـ ء (شكل ٤٢) وأنواعه

المستطيل وهو متوازى أضــلاع اضــلاعه المتجاورة مختلفة وزواياه قائمة مثــل ا ب حـ ء (شكل ٤٣)

والمربــع وهو متوازى اضــلاع أضــلاعه متساوية وزواياه قائمــة مثــل ا ب حـ ء (شكل ٤٤)

والمعين وهو متوازى اضلاع اضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة مثل ا ب حـ ء (شكل ٤٥)

ش ٤١ — ش ٤٢ — ش ٤٣ — ش ٤٤ — ش ٤٥

(٥٤) ينتج مما ذكر فى مبحث المتوازيات الخواص الآتية للشكل المتوازى الاضلاع

أولا ــ ان الزوايا المتقابلة من متوازى الاضلاع تكون متساوية لان أضلاعها متوازية ومتضادة فى الجهة مثنى (٥٠)

ثانيا ــ ان كل زاويتــين موجودتين على ضلع واحد من متوازى الاضلاع هما متكاملتان لانهما زاويتان داخلتان مجاورتان للقاطع

ثالثا ــ ان الاضلاع المتقابلة من متوازى الاضلاع تكون متساوية (٤٨)

رابعا ــ ان قطر متوازى الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين (٤٨)

نظـــــــرية

(٥٥) كل شكل رباعى يكون متوازى الاضلاع اذا توفر فيه أحد الامور الآتية وهى

أولا ــ اذا تساوت زواياه المتقابلة

ثانيا ــ اذا كان كل زاويتين منه موجودتين على نهايتى ضلع واحد متكاملتين

ثالثا ــ اذا تساوت الاضلاع المتقابلة منه

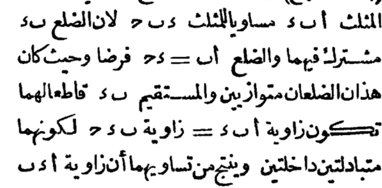
رابعا ــ اذا تساوى وتوازى أى ضلعين متقابلين منه

(برهان الاول) يقال حيث كان كل زاويتين متقابلتين منه متساويتين وكان مجموع زواياه الداخلة مساويا ٤ قوائم يكون مجموع كل زاويتين موجودتين على نهايتى ضلع واحد مساويا قائمتين وهذا يستلزم توازى أضلاعه المتقابلة

(برهان الثانى) داخل فى برهان الاول

(برهان الثالث) يقال ان تساوى أضلاعه المتقابلة يستلزم تساوى المثلثين اللذين يحدثان من وصل أحد قطريه لتساوى الاضلاع الثلاثة فيهما وينتج من تساوى المثلثين المذكورين تساوى الزوايا المتقابلة من الشكل الرباعى وحينئذ فيرجع الامر الى الاول

(برهان الرابع) يقال اذا كان الضلع اب يوازى ويساوى الضلع حد (شكل ٤٦) يكون المثلث ابد مساويا للمثلث دبح لان الضلع بد مشترك فيهما والضلع اب = دح فرضا وحيث كان هذان الضلعان متوازيين والمستقيم بد قاطع لهما تكون زاوية ابد = زاوية بدح لكونهما متبادلتين داخلتين وينتج من تساويهما أن زاوية ادب تساوى زاوية دبح وحيث كانتا متبادلتين داخلتين فيكون المستقيمان اد , بح متوازيين وهو المراد بيانه

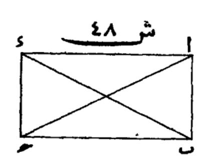


نظـــــرية

(٥٦) قطر امتوازى الاضلاع ينصفان بعضهما (شكل ٤٧)

وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين اده , بهح متساويان لان فيهما الضلع اد = الضلع بح من خاصية الشكل (٥٤ ثالثا) وفيهما زاوية هاد = زاوية هحب لانهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين اد , بح والقاطع لهما اح وفيهما أيضا زاوية اده = زاوية حبه لكونهما متبادلتين داخلتين أيضا بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع لهما بد ومن تساويهما ينتج أن الاضلاع المقابلة للزوايا المتساوية هى متساوية أعنى أن اه = هح , ده = به وهو المطلوب

(نتيجة ١) قطرا المستطيل متساويان (شكل ٤٨)
لان المثلثين اب د و ا د ح فيهما ضلعان والزاوية
المحصورة بينهما من أحدهما مساوية لنظائرها من الآخر
(نتيجة ٢) قطرا المربع والمعين ينصفان بعضهما
ويكونان متعامدين ولا حاجة للبرهنة على ذلك لسهولته



نظرية

(٥٧) شبيها المنحرف يكونان متساويين متى تساوت فيهما الاضلاع الاربعة النظير لنظيره (شكل ٤٩)

وللبرهنة على ذلك يمد من النقطتين د و دَ مستقيمان موازيان للضلعين اب و اَبَ فيحدث أن

د م = اب = اَبَ = دَمَ

وأن

اد = ب م = اَدَ = بَمَ

وحينئذ يكون م ح = مَ حَ ويكون المثلثان د م ح و دَ مَ حَ متساويين لتساوى أضلاعهما الثلاثة المتناظرة وينتج من تساويهما أن زاوية ح = حَ وحينئذ فشبيها المنحرف المذكوران يدخلان فى النظرية العمومية لتساوى الاشكال الرباعية نمرة (٤٢)

(تنبيهان) الاول ـ يتساوى متوازيا الاضلاع اذا ساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بها لنظائرها من الثانى ويتساوى المعينان اذا ساوى من أحدهما زاوية وضلع لنظيريهما من الثانى

وأما المستطيلان فيتساويان اذا ساوى من أحدهما ضلعان متجاوران لنظيريهما من الثانى

وأما المربعان فيتساويان اذا ساوى ضلع من أحدهما ضلعا من الآخر

ولا حاجة للبرهنة على هذه الامور لسهولتها

الثانى ـ تقدم (٤١ نتيجة) أن أى شكل رباعى يتعين عموما بمعرفة خمسة أشياء منه وقد علم الآن أن شبه المنحرف يتعين بأربعة فقط ومتوازى الاضلاع بثلاثة والمعين والمستطيل باثنين والمربع بواحد

الفصل التاسع

تمرينات

١ ـ المطلوب رسم زاوية متممة لزاوية معلومة

٢ ـ المطلوب رسم زاوية مكملة لزاوية معلومة

٣ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متكاملتين هما متعامدان

٤ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متقابلتين بالرؤس يكونان على استقامة واحدة

٥ ـ المطلوب البرهنة على أن مجموع قطرى أى شكل رباعى محدب أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها

٦ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى رؤسه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع أضلاع المثلث وأكبر من نصف مجموعها

٧ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا وصل من رأس مثلث الى وسط قاعدته بمستقيم كان هذا المستقيم أصغر من نصف مجموع الضلعين المحيطين به

٨ ـ المطلوب البرهنة على أن مجموع المستقيمات الواصلة من رؤس المثلث الى أواسط أضلاعه يكون أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها

٩ ـ المطلوب البرهنة على أن الاعمدة الثلاثة المقامة على أواسط أضلاع المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

١٠ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا أنزل من نهايتى قاعدة مثلث متساوى الساقين عمودان على الساقين كان هذان العمودان متساويين

١١ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمات المنصفة لزوايا المثلث الثلاث تتقاطع فى نقطة واحدة

١٢ ـ المطلوب تعيين المستقيم المنصف لزاوية متكونة من مستقيمين لايمكن تقاطعهما فى حدود الرسم

١٣ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متوازية يكونان اما متوازيين أو متعامدين ومثلهما المنصفان لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متعامدة

١٤ ـ المطلوب البرهنة على أن الاعمدة الثلاثة النازلة من رؤس المثلث على أضلاعه تتقاطع فى نقطة واحدة

١٥ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا مد من رؤس أى شكل رباعى مستقيمات متوازية لاقطاره فانه يتشكل من ذلك شكل متوازى الاضلاع يكون مكافئا لضعف الشكل الرباعى الاول

١٦ ـ المطلوب ايجاد المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين معلومين

١٧ ـ المطلوب ايجاد المحل الهندسي للنقط الموضوعة على بعد معين من مستقيم معلوم

١٨ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث يكون موازيا للضلع الثالث ومساويا لنصفه

١٩ ـ ما نوع الشكل الرباعي الذي يحدث اذا وصل بين أواسط أضلاع المعين بمستقيمات

٢٠ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمات المنصفة لزوايا شكل رباعي يتكون عنها شكل رباعي آخر تكون زواياه المتقابلة متكاملة

الباب الثاني

(في محيط الدائرة وما يتعلق به)

الفصل الاول

(تعاريف)

(٥٨) محيط الدائرة هو خط منحن جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا (شكل ٥٠)

فالخط المنحني ا ب ل حـ ء ى يسمى محيط الدائرة ونقطة و تسمى مركزا وبعبارة أخرى محيط الدائرة هو المحل الهندسي الجامع لجميع النقط المتساوية البعد على نقطة ثابتة تسمى مركزا

والدائرة هي جزء المستوى المحاط بهذا الخط المنحني

كل مستقيم مار بالمركز ومنتهٍ بنقطة من المحيط يسمى نصف قطر مثل و ا وكل مستقيم مار بالمركز ومنته بنقطتين من المحيط يسمى قطرا فبناء على هذا وعلى تعريف محيط الدائرة تكون أنصاف الاقطار متساوية والاقطار كذلك

القوس هو جزء من المحيط مثل ب ل ح

وتر القوس هو المستقيم الواصل بين نهايتيه مثل المستقيم ب ح غير أن هذا المستقيم يعتبر وترا لقوس آخر ب ا ى د ح وحينئذ فكل وتر يقابله قوسان مجموعهما يساوى المحيط

القطعة هى جزء من الدائرة محصور بين قوس ووتره مثل القطعة ب ل ح ولما كان الوتر ب ح يقابله قوسان فيقابله أيضا قطعتان مجموعهما مساو للدائرة

متى أطلق لفظ القوس أو القطعة لا يفهم من ذلك الا القوس الصغير أو القطعة الصغيرة لانهما هما المقصودان عند عدم التقييد

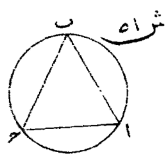
القطاع هو جزء من الدائرة محصور بين قوس ونصفى القطرين المارين بنهايتيه مثل ا و ب

قاطع الدائرة هو المستقيم الذى يقطع محيطها فى نقطتين مثل المستقيم م ط

المماس هو المستقيم الذى لا يشترك مع محيط الدائرة الا فى نقطة واحدة تسمى نقطة التماس مثل المستقيم د ى هـ ونقطة ى هى نقطة التماس

الزاوية المركزية هى الزاوية التى يكون رأسها بالمركز وضلعاها نصفا قطرين مثل الزاوية ح و د

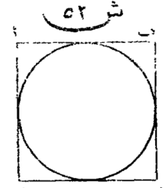
الزاوية المرسومة داخل الدائرة أو المحيطية هى ما كانت رأسها على المحيط وضلعاها وتران مثل زاوية ا ب ح من (شكل ٥١)



المثلث المرسوم داخل الدائرة هو ما كانت رؤسه على المحيط وأضلاعه أوتارا فيه مثل ا ب ح ويقال على وجه العموم لاى شكل انه مرسوم داخل الدائرة متى كانت رؤسه على المحيط وأضلاعه أوتارا فيه

محيطا الدائرتين المتماسان هما اللذان لا يشتركان الا فى نقطة واحدة فقط

والزاوية المرسومة خارج الدائرة هى ما كانت رأسها خارج الدائرة وضلعاها مماسين لمحيطها مثل زاوية ب (شكل ٥٢)

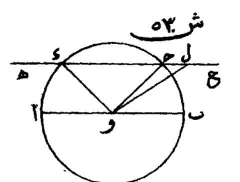


الشكل المرسوم خارج الدائرة ما كانت أضلاعه مماسة لمحيطها مثل ا ب ح د ويقال للدائرة فى هذه الحالة انها مرسومة داخل الشكل

نظـــــــــرية

(٥٩) قاطع الدائرة لا يمكن أن يقطع محيطها فى أكثر من نقطتين (شكل ٥٣)

أعنى أن القاطع هـ ح لا يمكن أن يقطع محيط دائرة و فى غير النقطتين ح و ى



اذ لو فرض أنه يقطع المحيط فى نقطة ثالثة مثل ل ووصلنا المستقيمات و ل و و ح و و ى للزم أن تكون هذه المستقيمات كلها متساوية لانها اذن أنصاف أقطار لدائرة واحدة لمرورها جميعها بالمركز ولانتهاء كل منها بنقطة من نقط المحيط وهو باطل كما تقــدم (٣٢ الامر الثالث نتيجة ٢) ومانشأ هذا الا من فرض أن المستقيم يقطع المحيط فى نقطة ثالثة وبذا يثبت المطلوب

تنبيـه ـ يشاهد من الشكل المذكور أن الضلع ح ى < ح و + و ى أو ح ى < ا ب أعنى أن أكبر المستقيمات التى يمكن رسمها داخل الدائرة هو القطر

نظـــــــرية

(٦٠) قطر الدائرة يقسمها هى ومحيطها الى قسمين متساويين

وذلك لانه لو طبق جزء الدائرة العــلوى على جزئها السفلى حول القطر فانهما ينطبقان على بعضهما كمال الانطباق اذ لو فرض خلاف ذلك بأن كان بعض نقط أحد الجزأين وقع داخلا أو خارجا تكون ضرورة أبعاد هذه النقط عن المركز غير متساوية وهو مخالف لتعريف الدائرة وبناء عليــه فلا بد من حصول الانطباق التام

وهــذه نظرية يستفاد منها تساوى الدائرتين المرسومتين بنصفى قطرين متساويين لانه اذا وضــع مركز أحدهما على مركز الاخرى فانه لا بد من انطباق جميع نقط محيطيهما على بعضهما تماما

الفصـــــل الثـانى

(فى الاوتار والاقواس)

نظـــــرية

(٦١) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها متساوية وبالعكس أى ان الاوتار المتساوية أقواسها متساوية (شكل ٥٤)

مثلا فى دائرة و اذا كان القوس ا ب = القوس ﺣ د يكون الوتر ا ب = الوتر ﺣ د
وبالعكس اذا كان الوتر ا ب = الوتر ﺣ د يكون القوس
ا ب = القوس ﺣ د

ش ٥٤

وللبرهنة على الشق الاول من هذه النظرية يعلم من نقطة
ك وسط القوس ب ﺣ القطر ك ع ثم يطبق نصف
المحيط ك ﺣ د ع على نصف المحيط ك ب ا ع فحيث ان
نقطة ك هى وسط القوس ﺣ ب تقع نقطة ﺣ على
نقطة ب وحيث ان القوس ﺣ د = القوس ب ا تقع نقطة د على نقطة ا وحينئذ
ينطبق الوتر ﺣ د على الوتر ب ا لاشتراكهما فى نقطتين ويكونان متساويين
وللبرهنة على الشق الثانى يقال اذا وصلت أنصاف الاقطار و ا و و ب و و ﺣ و و د حدث
المثلثان و د ﺣ و و ب ا المتساويان لتساوى أضلاعهما الثلاثة المتناظرة وينتج من تساوى
المثلثين المذكورين تساوى الزاويتين د و ﺣ و ب و ا فاذا طبق نصف المحيط ك ﺣ د ع
على النصف الآخر ك ب ا ع فالمثلثان ﺣ و د و ب و ا ينطبقان على بعضهما ويتحد
الوتران ﺣ د و ب ا وبناء عليه يتساوى القوسان ﺣ د و ب ا وهو المراد
تنبيـــه ـ الشق الثانى من هذه النظرية لايكون حقيقيا الا اذا كان كل واحد من القوسين
فى آن واحد إما أصغر أو أكبر من نصف المحيط

نظـــــــرية

(٦٢) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية القوس الاكبر يكون وتره أكبر وبالعكس أى أن
الوتر الاكبر يكون قوسه أكبر هذا اذا لم يتجاوز القوس
نصف المحيط والا كان عكس ذلك (شكل ٥٥)

ش ٥٥

وللبرهنة على ذلك يؤخذ القوس ا م د مساويا للقوس
ﻫ ﺣ الاصغر فيكون الوتر ا د مساويا للوتر ﻫ ﺣ (٦١)
ثم يوصل ا و و د و و ط و فالمثلثان الحادثان ا و د
و ا و ط فيهما الضلع ا و مشترك والضلع و د = و ط
لكنه حيث كانت زاوية ا و ط أكبر من زاوية ا و د يكون الضلع ا ط أكبر من الضلع
ا د أو أكبر من المساوى له ﻫ ﺣ (٢٦) وهو المراد

واذا كان الوتر اط أكبر من الوتر هح يكون القوس ا م ط أكبر من القوس هح اذ لو فرض خلاف ذلك فاما أن يكون القوس ا م ط مساويا للقوس هح أو أصغر منه فان كان الاول يكون الوتر اط مساويا للوتر هح وهو خلاف الفرض وان كان الثانى يكون الوتر اط أصغر من الوتر هح وهو المطلوب

نظـــــــرية

(٦٣) نصف القطر العمودى على وتر ينصفه وينصف قوسه أيضا (شكل ٥٦)

أعنى اذا كان نصف القطر وح عمودا على الوتر ا ب يكون اء = ءب ويكون القوس اح = القوس حب

وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين وءب , وءا القائمى الزاوية متساويان لوجود الضلع وء مشتركا بينهما ولتساوى الوتر وب بالوتر وا (٢٨) ومن تساويهما ينتج أن الضلع اء = الضلع ءب ثم اذا وصل الوتران بح , حا فالمثلثان ءبح و اح ء يكونان متساويين لاشتراك الضلع ءح فيهما ولتساوى الضلع ءب بالضلع ءا كما سبق ذكره ولتساوى زاوية ب ء ح بزاوية اءح وينتج من تساوى المثلثين أن الضلع اح يساوى الضلع حب ومن تساويهما يكون القوس اح = القوس حب وهو المطلوب

تنبيـه ـ يعلم مما ذكر أن المستقيم وح متوفر فيه أربعة امور وهى مروره بالمركز وبمنتصف الوتر وبمنتصف القوس وكونه عمودا على الوتر وتحقق وجود أمرين من هذه الامور الاربعة يستلزم تحقق الامرين الآخرين فيقال للمستقيم العمودى على وسط وتر أنه يمر بالمركز وبمنتصف القوس وهكذا

نظـــــــرية

(٦٤) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاوتار المتساوية أبعادها عن المركز متساوية والاوتار المختلفة أبعادها عن المركز مختلفة وأطولها هو أقربها من المركز (شكل ٥٧)

أعنى اذا كان الوتر اب = الوتر حء يكون العمود وح مساويا للعمود وط واذا كان الوتر اه أكبر من الوتر حء يكون العمود ول أصغر من العمود وط

(برهان الاول) يوصل و ا , و ح فالمثلثان القائما الزاوية و ع ا , و ط ح متساويان لان فيهما الوتر و ا = الوتر و ح والضلع ا ع = الضلع ح ط (٦٣) وينتج من تساويهما أن و ع = و ط

ش ٥٧

(برهان الثانى) يؤخذ الوتر ا ب مساويا للوتر ح ٤ ثم يقال حيث كان و ل عمودا على ا هـ فيكون و ق مائلا عليه وحينئذ يكون و ل < و ق أو و ل < و ع وهو المراد

نتيجة — يسهل البرهنة على عكس هذه القضية أى اذا تساوى بعدا وترين أو أكثر عن المركز تكون الاوتار متساوية واذا اختلفت أبعادها تكون مختلفة وأقصرها ما كان بعده عن المركز أكبر

نظـــــــــرية

(٦٥) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمكن أن يمر بها محيط دائرة واحد لا اثنان (شكل ٥٨)

ش ٥٨

(برهان الاول) يوصل المستقيمان ا ب , ا ح ثم يقام العمودان ٤ هـ , ع ط على منتصفى الوترين ا ب , ا ح فيتقاطعان فى نقطة و لان العمودين المقامين على مستقيمين متقاطعين يتقاطعان (٤٩) وتكون نقطة و مركزا لمحيط دائرة يمر بالنقط الثلاثة المفروضة لان أبعادها و ح , و ا , و ب عن نقطة و متساوية

(برهان الثانى) يقال لو فرض امكان مرور محيط آخر بالنقط الثلاثة المفروضة فان مركزه لابد وأن يوجد على كلا العمودين ٤ هـ , ع ط المقامين على وسط الوترين (٦٣) ا ب , ا ح ولما كان هذان العمودان لا يمكن أن يتقاطعا الا فى نقطة واحدة يكون اذن مركز المحيط الثانى هو عين مركز الاول وحيث ان كل واحد منهما يجب أن يمر بالنقط الثلاثة ا , ب , ح فيكون نصف قطريهما واحدا وحينئذ فيتحدان معا ويصيران محيطا واحدا

(نتيجة ١) محيطا الدائرتين لا يمكن أن يتقاطعا فى أكثر من نقطتين لانهما لو اشتركا فى ثلاث نقط فانهما يتحدان معا ويصيران محيطا واحدا

(نتيجة ٢) اذا وصل المستقيم ب ح وأقيم العمود ل ك على وسطه فانه لابد وأن يمر بالمركز (٦٣) وحينئذ فالاعمدة الثلاثة المقامة على أواسط أضلاع مثلث تتقاطع فى نقطة واحدة تكون مركزا لمحيط الدائرة الذى يمر برؤسه

الفصل الثالث

(فى خواص المماس وعمود المنحنى)

(٦٦) المستقيم العمودى على نهاية نصف قطر يكون مماسا لمحيط الدائرة أى لا يشترك مع المحيط الافى نقطة واحدة وبالعكس (شكل ٥٩)

ط ا و

(برهان الاول) يقال لو فرض اشتراكهما فى نقطة ثانية مثل ط ووصل منها المستقيم وط لكان مائلا على اط ويكون وط أكبر من وا وهذا يستلزم أن تكون نقطة ط خارجة عن المحيط

(برهان الثانى) يقال حيث ان اط لا يشترك مع المحيط الافى نقطة ا فكل نقطة خلافها مثل ط موجودة عليه تكون خارجة عن المحيط ويكون وط > وا وحينئذ فالبعد وا يكون أصغر الابعاد التى يمكن مدها من نقطة و الى المستقيم اط فيكون عمودا على اط وهو المطلوب

(نتيجة ١) من أى نقطة مثل ا مفروضة على محيط الدائرة لا يمكن أن يمد الا مماس واحد له لا اثنان وذلك لانه لا يمكن من النقطة المذكورة الا اقامة عمود واحد اط على نصف القطر وا

(نتيجة ٢) المستقيمان المماسان لمحيط دائرة و الممدودان من نهايتى قطر واحد يكونان متوازيين لانهما عمودان على مستقيم واحد

(نتيجة ٣) المستقيمان المتوازيان والمماسان لمحيط دائرة يكون المستقيم المار بنقطتى تماسهما قطرا أى مارا بالمركز

نظرية

(٦٧) مماس محيط الدائرة فى نقطة ما يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع المستقيم القاطع المار بهذه النقطة (شكل ٦٠)

ب ط م ه و

أعنى ان المماس ب ط لمحيط الدائرة و فى نقطة ب يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع القاطع ب ح المار بنقطة التماس ب والبرهنة على ذلك يقال اذا أنزل العمود وم على الوتر ح ب ثم فرض تحرك هذا الوتر حول نقطة ب بحيث تقرب نقطة ح شيأ فشيأ من نقطة ب فان العمود وم يأخذ فى الازدياد شيأ فشيأ

وحينئذ فعندما تتحد نقطة ح بنقطة ب ينطبق العمود وم على وب ويتحد الوتر بالمماس ويثبت المطلوب

فائدة — يمكن أن يستنتج مما ذكر تعريف عام لمماس أى منحن فيقال ان مماس أى منحن فى نقطة ما هو نهاية الاوضاع التى يأخذها قاطع مار بنقطة التماس يتحرك حولها بحيث تقرب نقطة تقاطعه الثانية بالمنحنى شيأ فشيأ من الاولى

نظـــــرية

(٦٨) اذا مدّ من نقطة خارجة عن محيط دائرة مماسان له فجزآهما المحصوران بين النقطة المفروضة ونقطتى التماس يكونان متساويين أعنى أن

اب = اح (شكل ٦١)

ش ٦١

وللبرهنة على ذلك يوصل وب و وح فيكونان عمودين بالتناظر على اب و اح (٦٦ الثانى) ثم يوصل وا فالمثلثان الحادثان اب و و اح و القائما الزاوية متساويان لاشتراك الوتر ا و فيهما وتساوى الضلع وح للضلع وب وينتج من تساويهما أن اب = اح وهو المراد

نظـــــرية

(٦٩) المستقيمان المتوازيان يحصران بينهما من المحيط قوسين متساويين (شكل ٦٢)

ش ٦٢

فاذا فرضنا أن المستقيمين حب و هد متوازيان نقول ان القوس هح = القوس دب

وللبرهنة على ذلك يمد من نقطة و القطر وا عمودا عليهما فيتحصل بمقتضى ما سبق (٦٣) أن قوس اح = قوس اب وأن قوس اه = قوس اد وبطرح المتساوية الثانية من الاولى يحدث هح = دب

أما اذا كان أحد المتوازيين مماسا للمحيط مثل ع ط فانه يوصل نصف القطر وا فيصير عمودا على كلا المتوازيين ويصير القوس ح ا مساويا للقوس اب

واذا كان المستقيمان المتوازيان مماسين للمحيط فان المستقيم ا ل الواصل بين نقطتى تماسهما يكون قطرا (٦٦ نتيجة ٣) وهو يقسم محيط الدائرة الى قسمين متساويين (٦٠)

(٧٠) عمود المنحنى فى نقطة ما هو العمود على المماس المار بهذه النقطة

وينتج من هذا التعريف أن أعمدة نقط محيط الدائرة هى أنصاف أقطاره

الفصــــــل الرابــع

(فى أوضـاع الدائرة)

نظــــــرية

(٧١) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطة خارجة عن المستقيم الواصل بين المركزين يلزم أن يشتركا فى نقطة أخرى مماثلة للاولى بالنسبة لعيـن المســتقيم الواصـل بين المركزين (شكل ٦٣)

أى اذا اشترك المحيطان و , وَ فى نقطة ا الخارجة عن المستقيم و وَ الواصـل بين المركزين يلزم أن يشتركا فى نقطة أخرى مماثلة لنقطة ا بالنسبة للمستقيم و وَ

ش ٦٣

والبرهنـــة على ذلك ينزل من نقطة ا العمود ا اَ على و وَ ويؤخذ البعد ى اَ مساويا ى ا فتسمى نقطة اَ الحادثة مماثلة لنقطة ا بالنســبة للمستقيم و وَ

ثم اذا وصـل و ا , و اَ فهـذان المستقيمـان يكونان متساويين لانهـما مائلان متساويى البعد بالنسبة لنقطة ى موقع العمود و ى وحينئذ فمحيط الدائرة الذى مركزه و ونصف قطره و ا يمر بنقطة اَ كما أنه يمر بنقطة ا

وكذا لو وصل وَ ا , وَ اَ كان هذان المستقيمان متساويين أيضا ويكون محيط الدائرة الذى مركزه وَ ونصف قطره وَ ا يمر بنقطة اَ وحينئذ تكون نقطة اَ مشتركة بين المحيطين

(نتيجـة ١) اذا لم يشترك محيطا دائرتين الا فى نقطة واحدة بأن كانا متماسين فان نقطة التماس لا توجد الا على المستقيم الواصـل بين المركزين وذلك لانه لو وجدت خارجة عنــه لزم وجود نقطة اخرى مشتركة بين المحيطين وهو مغاير للفرض

(نتيجـة ٢) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطتين موجودتين على المستقيم الواصل بين المركزين فانهما يتحدان معا وذلك لانهما فى هذه الحالة يكونان متحدين فى القطر وحينئذ فيكون مركزهما واحدا ونصف قطرهما واحدا أيضا

(نتيجـــة ٣) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطتين احداهما على المستقيم الواصل بين المركزين والاخرى خارجة عنه فانهما يتحدان معا وذلك للزوم اشتراكهما فى نقطة ثالثة مماثلة للنقطة الثانية

نظـــــــرية

(٧٢) اذا اشـترك محيطا دائرتين فى نقطتين فان المستقيم الواصل بين المركزين يكون عمودا على وسط الوتر المشترك بينهما (شكل ٦٣)

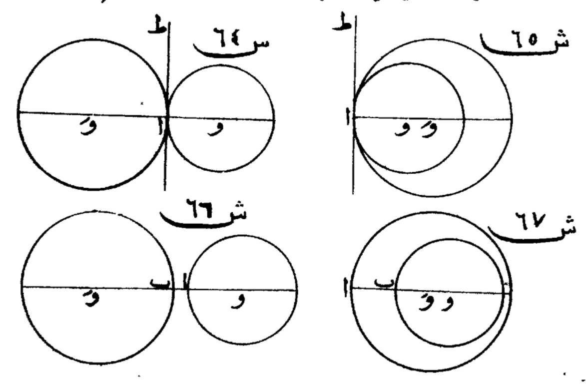
وللبرهنة على ذلك يقـال من المعـلوم أن هاتين النقطتين لايمكن أن تكونا على المستقيم الواصل بين المركزين (٧١ نتيجة ٢) بل تكونان خارجتين عنه وحيث ان نقطة و على بعدين متساويين من نقطتى ا , اَ فتوجد على العمود القائم على وسـط ا اَ ومثلها نقطة وَ وحينئذ فالمستقيم ووَ عمود على وسط ا اَ وهو المراد

فائدة ــ محيطا الدائرتين الموجودان فى مستو واحد لايمكن أن يكون لهما بالنسـبة لبعضهما سوى خمسة أوضاع فقط وهى

أوّلا ــ اما أن يشتركا فى نقطتين ويقال لهما فى هذه الحالة متقاطعين (شكل ٦٣)

ثانيا ــ اما أن يشتركا فى نقطة واحدة فقط بمعنى أن يكونا متمـاسين وفى هذه الحالة يكون أحد المحيطين خارجا عن الآخر أو داخلا فيــه ويقـال لمحيطى الدائرتين متمـاسان خارجا أو داخلا (شكل ٦٤ و ٦٥)

ثالثا ــ اما أن لايكون لهـما نقط مشتركة وفى هـذه الحالة يكون أحد المحيطين اما خارجا عن الآخر أو داخلا فيه و يسمى المحيطان متباعدان فى الخـارج أو فى الداخل (شكل ٦٦ و ٦٧)



نظـــــــــرية

(٧٣) اذا رمزنا بالحرف د للبعد بين مركزى محيطى دائرتين وبالرمزين ر و رَ لنصفى قطريهما فاننا نبرهن على الامور الآتية

أولا ـ اذا تباعد المحيطان فى الخارج يكون د > ر + رَ

ثانيا ـ اذا تماسا فى الخارج يكون د = ر + رَ

ثالثا ـ اذا تقاطعا يكون د < ر + رَ و د > ر — رَ

رابعا ـ اذا تماسا فى الداخل يكون د = ر — رَ

خامسا ـ اذا تباعدا فى الداخل يكون د < ر — رَ

(برهان الاول) يقال من المعلوم ان البعد وَوَ الكائن بين المركزين (شكل ٦٦) مركب من نصفى القطرين ر و رَ ومن المسافة أ ب وحينئذ يكون د > ر + رَ

(برهان الثانى) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى الدائرتين موجودة على المستقيم الواصل بين المركزين وحينئذ يكون هذا المستقيم مركبا من نصفى القطرين فقط أعنى يكون د = ر + رَ (شكل ٦٤)

(برهان الثالث) يقال من المعلوم انه متى تقاطع دائرتان فان نقطتى التقاطع تكونان خارج البعد بين المركزين وحينئذ فالمثلث وَوَا يؤخذ منه ان د < ر + رَ و > ر — رَ (شكل ٦٣)

(برهان الرابع) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى دائرتين فى الداخل تكون على المستقيم الواصل بين المركزين وحينئذ يكون نصف القطر الاصغر جزأ من نصف القطر الاكبر ويكون د = ر — رَ (شكل ٦٥)

(برهان الخامس) يقال اذا تباعد محيطا دائرتين فى الداخل فان نصف القطر الاكبر يكون مركبا من البعد بين المركزين ومن نصف القطر الاصغر ومن بعد آخر أ ب وحينئذ يكون د < ر + رَ (شكل ٦٧)

نظـــــــــرية

(٧٤) عكس هذه القضايا الخمسة حقيقى وطريقة البرهنة عليها واحدة

مثلا اذا كان البعد بين المركزين أصغر من التفاضل الكائن بين نصفى القطرين يكون محيطا الدائرتين

متباعدين فى الداخل والبرهنة على ذلك يقال ان لم يكونا متباعدين فى الداخل لكانا اما متباعدين فى الخارج أو متماسين خارجا أو داخلا أو متقاطعين وحيث ان قانون البعد بين المركزين فى كل واحدة من هذه الاحوال مخالف للفرض كان المحيطان متباعدين فى الداخل ضرورة وهو المطلوب

وعلى هذا يقاس الباقى

الفصـــل الخامس

(فى مقادير الزوايا)

(٧٥) قبل التكلم على مقادير الزوايا نذكر ما يأتى

أولا — من المعلوم انه اقياس أى كمية يبحث عن نتيجة تقديرها بأخرى من نوعها معتبرة وحدة وهذه النتيجة تسمى نسبة فعلى هذا اذا أريد قياس مستقيم معلوم فانه يبحث عن النسبة الكائنة بينه و بين الوحدة التى من جنسه

ثانيا — اذا قيل ان النسبة بين مستقيمين معلومين هى كالنسبة بين عددين صحيحين مثل ٧ و ١٣ مثلا فانه يفهم منها انحصار مستقيم ثالث ٣ مرات فى أحدهما و ١٣ مرة فى الثانى وان هذا المستقيم الثالث هو مقياس مشترك بين هذين المستقيمين وبناء على ذلك اذا أريد تعيين النسبة بين أى مستقيمين فانه يجب البحث عن مقياس مشترك بينهما ثم يقسم عدد مرات انحصاره فى أحدهما على عدد مرات انحصاره فى الثانى كما سنذكره

مسـألة

(٧٦) المطلوب ايجاد المقياس المشترك بين مستقيمين معلومين (شكل ٦٨)

اذا كان المستقيمان المعلومان هما اب و حد فانا نجرى عليهما عملية مماثلة للعملية التى تحصل عند ايجاد القاسم المشترك الاعظم بين عددين

ش ٦٨

فنطبق أصغرهما حد على الاكبر اب عدة مرات صحيحة بقدر انحصاره فيه ولنفرض ان عدد ٣ هو عدد مرات الانحصار من ابتداء نقطة ا الى نقطة ه وان هب هو الباقى فيحصل ان

اب = ٣ حد + هب (١)

ثم نطبق بعد ذلك الباقى هـ ب على المستقيم الاصغر حـ ى كما تقدم فنفرض ان حـ ى قد احتوى على الباقى هـ ب أربع مرات صحيحة زائدا الباقى ف ى فيتحصل

حـ ى = ٤ هـ ب + ف ى (٢)

ثم نطبق هذا الباقى الثانى ف ى على الباقى الاوّل هـ ب كما ذكر من ابتداء نقطة هـ الى نقطة ع ونفرض أنه بقى باق ثالث ع ب فيحدث

هـ ب = ف ى + ع ب (٣)

وأخيرا نطبق ع ب على ف ى ونفرض انحصاره فيه أربع مرات بدون باق فيحدث

ف ى = ٤ ع ب (٤)

ثم اذا أبدل فى المتساوية (٣) ف ى بمقداره من المتساوية (٤) يحدث

هـ ب = ٤ ع ب + ع ب = ٥ ع ب

فاذا أبدل الآن فى المتساوية (٢) كل من هـ ب و ف ى بمقداريهما الناتجين يحدث

حـ ى = ٢٠ ع ب + ٤ ع ب = ٢٤ ع ب

وأخيرا اذا أبدل فى المتساوية (١) كل من حـ ى و هـ ب بمقداريهما الاخيرين يحدث

أ ب = ٧٢ ع ب + ٥ ع ب = ٧٧ ع ب

ومما ذكر ينتج

أوّلا ـ ان الباقى الاخير ع ب هو المقياس المشترك بين المستقيمين أ ب و حـ ى

ثانيا ـ حيث كان هذا المقياس المشترك محصورا ٧٧ مرة فى المستقيم الاوّل و ٢٤ مرة فى الثانى كانت النسبة بين هذين المستقيمين المعلومين هى كالنسبة بين ٧٧ و ٢٤ وتبين على هذه الصورة $\frac{٧٧}{٢٤}$ أو $\frac{٢٤}{٧٧}$ فالصورة الاولى تدل على أن النسبة بين أ ب و حـ ى هى عين النسبة بين العددين ٧٧ و ٢٤ وأما الصورة الثانية فتدل بالعكس على أن النسبة بين حـ ى و أ ب هى عين النسبة بين العددين ٢٤ و ٧٧

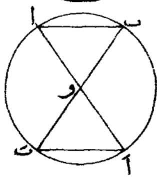
تنبيه ـ المقياس المشترك الذى علم ليس هو المقياس المشترك الوحيد بين هذين المستقيمين بل ان جميع قواسم هذا المقياس تكون ضرورة مقاييس مشتركة لهما لضرورة انحصارها فيهما مرارا صحيحة وعلى العموم متى وجد مقياس مشترك بين خطين كان لهما مقاييس مشتركة كثيرة جدا تعلم بواسطة قسمة هذا المقياس الى أنصاف وأثلاث وأرباع وهكذا وأكبر واحد من هذه المقاييس يقال له المقياس المشترك الاعظم

(٧٧) كل خطين مستقيمين يوجد لهما مقياس مشترك يقال لهما مستقيمان متناسبان وكل مستقيمين لم يكن بينهما مقياس مشترك يقال لهما غير متناسبين الا انه كلما ظهر باق وطبق على الباقى الذى قبله مرارا فانه لابد وأن يتوصل من توالى العمل الى باق صغير جدا غير محسوس بحيث يمكن اعتباره كلا شئ وبناء عليه فيمكن اعتبار أى مستقيمين كأنهما متناسبان دائما أعنى أنه يوجد بينهما مقياس مشترك سواء كان هذا المقياس حقيقيا أو تقريبيا

(٧٨) حيث ان أى قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية يمكن انطباقهما على بعضهما فبناء عليه يمكن اجراء ما قيل فى المقياس المشترك بين مستقيمين على أى قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية واذن فكل قوسين من هذا القبيل يمكن أن يوجد بينهما دائما مقياس مشترك اما حقيقى أو تقريبى

نظـــــــرية

(٧٩) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية تكون زواياها المركزية متساوية وبالعكس أى اذا كانت الزوايا المركزية متساوية تكون أقواسها كذلك (شكل ٦٩)



أعنى اذا كان القوس ا ب = القوس ا َ ب َ تكون زاوية ا و ب تساوى زاوية ا َ و ب َ وكذا اذا كانت الزاوية المركزية ا و ب تساوى الزاوية المركزية الاخرى ا َ و ب َ يكون قوس ا ب = قوس ا َ ب َ

(برهان الاول) يوصل الوتران ا ب ، ا َ ب َ فمن حيث ان القوسين ا ب ، ا َ ب َ متساويان يكون وتراهما كذلك وحينئذ فالمثلثان ا و ب ، ا َ و ب َ يكونان متساويين لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما وينتج من تساويهما أن زاوية ا و ب = زاوية ا َ و ب َ وهو المراد

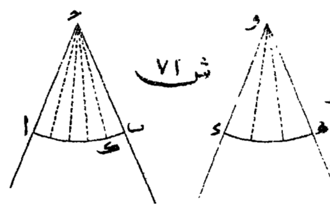
(برهان الثانى) يقال ان المثلثين ا و ب ، ا َ و ب َ متساويان لتساوى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من أحدهما لنظائرها من الثانى وينتج من تساويهما أن الضلع ا ب = الضلع ا َ ب َ وحيث كان هذان الوتران متساويين يكون قوساهما كذلك أعنى أن القوس ا ب = القوس ا َ ب َ وهو المطلوب

نظـــــــرية

(٨٠) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية النسبة بين أى زاويتين مركزيتين هى دائماً كالنسبة بين قوسيهما الواقعين بين ضلعيهما (شكل ٧٠)

لكن ا ح ب و ء و هـ زاويتين مركزيتين فى دائرتين متساويتين ولنفرض أولا وجود مقياس مشترك بين قوسيهما اب و ء هـ وأنه منحصر ٧ مرات فى القوس اب و ٤ مرات فى القوس ء هـ وحينئذ تكون النسبة بين هذين القوسين هى $\frac{٧}{٤}$ (٧٦ نتيجة ٢) فاذا وصل الآن جميع نقط تقاسيم كل قوس بمركز دائرته بمستقيمات يشاهد أن الزاوية ا ح ب انقسمت الى سبع زوايا مركزية متساوية لتساوى أقواسها (٧٩) المحصورة بين أضلاعها وأن الزاوية ء و هـ انقسمت الى أربع زوايا مركزية متساوية وتكون النسبة بين الزاويتين هى $\frac{٧}{٤}$ وهى عين النسبة الكائنة بين القوسين

فاذا لم يوجد بين القوسين مقياس مشترك بأن كانا غير متناسبين يقسم القوس ء هـ الى ثلاثة أقسام متساوية (شكل ٧١)



ثم نفرض أن القوس اب يشتمل على أربعة من هذه الاقسام وعلى الجزء ب ك الاصغر من أى واحد من هذه الاقسام فتكون النسبة بين القوسين اب و ء هـ أكبر من $\frac{٤}{٣}$ وأصغر من $\frac{٥}{٣}$

ثم اذا وصل بين المركزين ح و و وبين نقط التقاسيم بمستقيمات يشاهد أن الزاوية ء و هـ انقسمت الى ثلاث زوايا مركزية متساوية وأن الزاوية ا ح ب تشتمل على أربع من هذه الزوايا وعلى الزاوية ك ح ب الاصغر من أى واحدة منها وحينئذ تكون النسبة بين الزاويتين محصورة بين الكسرين $\frac{٤}{٣}$ و $\frac{٥}{٣}$ وبناء عليه تكون النسبتان $\frac{اب}{ءهـ}$ و $\frac{احب}{ءوهـ}$ محصورتين بين الكسرين $\frac{٤}{٣}$ و $\frac{٥}{٣}$

لكنه اذا قسم القوس ء هـ الى عشرة أقسام أو مائة جزء أو ألف جزء أو . . . الخ متساوية

فانه يبرهن كما سبق بأن النسبتين السابقتين محصورتين بين عددين متوالين من أجزاء العشرات أو من أجزاء المئين أو من أجزاء الالوف أو الخ وحينئذ فتكون هاتان النسبتان متساويتين حيث انه قد شوهد أنهما محصوران دائما بين عددين يمكن أن يؤل الفرق بينهما الى كمية صغيرة جدا على قدر ما يراد

و ينتج مما ذكر أنه اذا أريد ايجاد النسبة بين زاويتين فانه يستعوض ذلك بالبحث عن النسبة بين قوسيهما المحصورين بين أضلاعهما باعتبار رأسيهما مركزين لهما وحينئذ اذا اعتبر أحد القوسين وحدة للاقواس وزاويته وحدة للزوايا كانت الزاوية الاخرى مشتملة على وحدة الزوايا بقدر اشتمال قوسها على وحدة الاقواس ولذا يقال على وجه العموم ان الزاوية تقاس بقوسها المحصور بين ضلعيها الذى مركزه رأسها

(٨١) وقد اتفقوا على جعل الزاوية القائمة وحدة للزوايا لكون مقدارها ثابتا وعلى اعتبار قوسها وهو ربع المحيط الذى مركزه رأسها وحدة للاقواس بحيث لو أريد تقدير أى زاوية فانه يقدر قوسها بربع المحيط

والطريقة الآتية المبنية على تقسيم المحيط هى المستعملة فى التقدير

فيقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزأ متساوية تسمى درجا وتنقسم الدرجة الى ٦٠ دقيقة والدقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا وحينئذ فتقدر الزاوية بمقدار الدرج والدقائق والثوانى المشتمل عليه قوسها ولا فرق فى نسبة عدد الدرج والدقائق والثوانى وهكذا للقوس أو للزاوية فيقال ان قوس كذا أو زاوية كذا تشتمل مثلا على عشر درجات وخمس عشرة دقيقة وسبع ثوان ولاجل الاختصار فى الكتابة يرمز بهذه العلامة (°) لبيان الدرجة وبهذه (′) لبيان الدقيقة وبهذه (″) لبيان الثانية وهكذا

فالزاوية أو القوس الذى مقداره ١٥ درجة و ٢٧ دقيقة و ١٩ ثانية يكتب هكذا ١٩″ ٢٧′ ١٥°

والاعمال التى تقدمت فى علم الحساب على الاعداد المنتسبة يجرى تطبيقها هنا على الدرج والدقائق والثوانى بدون فرق ولنمثل لذلك فنقول

أولا ــ المطلوب تعيين مقدار الزاوية الثالثة من مثلث اذا علم زاويتاه الأخريان احداهما تساوى ١٩″ ٣٥′ ٦٠° والثانية تساوى ٤٧″ ٥٣′ ٨٠° يقال حيث كان مجموع زوايا المثلث مساويا قائمتين أو ١٨٠° كان مقدار الزاوية المطلوبة يتعين بواسطة طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من ١٨٠° هكذا

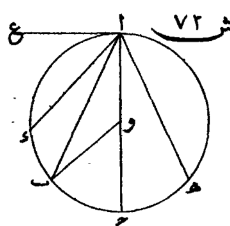
١٨٠° − [(١٩″ ٢٥′ ٦٠°) + (٤٧″ ٥٣′ ٨٠°)] = ١٨٠° − ٦″ ١٩′ ١٤١° = ٥٤″ ٤٠′ ٣٨°

ثانيا ــ المطلوب حساب الدرج الموجود فى زوايا شكل كثير الاضلاع عدد أضلاعه ٢٥ لذلك يقال ان عدد الزوايا القائمة الموجودة فى هذا الشكل مساو الى (٢٥ ــ ٢) ٢ = ٤٦ وبضرب هذا العدد فى ٩٠ يحدث ٤١٤٠°

ويوجد طريقة أخرى جديدة اعشارية فى تقسيم محيط الدائرة خلاف الطريقة السابقة وهى تقسيمه الى ٤٠٠ جزء متساوية يسمى واحدها غرادة والغرادة تنقسم الى ١٠٠ دقيقة. والدقيقة الى ١٠٠ ثانية وهكذا وهذه الطريقة وان كان يسهل الحساب بواسطتها لكن لازال استعمال الطريقة القديمة جاريا وهو الذى نتبعه هنا

نظـــــــرية

(٨٢) معيار الزاوية المحيطية هو نصف القوس المحصور بين ضلعيها (شكل ٧٢) ولهذه الزاوية جملة أوضاع



(الوضع الاول) أن يمر أحد ضلعيها بالمركز مثل زاوية ب ا ح فاذا وصل نصف القطر ب و تكون الزاوية ب و ح الخارجة عن المثلث ب و ا مساوية الى و ب ا + و ا ب وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان لان المثلث المذكور متساوى الساقين تكون زاوية ب و ح = ٢ ب ا ح ولما كانت زاوية ب و ح مركزية وتقاس بالقوس ب ح فتكون زاوية ب ا و التى هى نصفها تقاس بنصف القوس ب ح

(الوضع الثانى) أن يكون المركز بين الضلعين مثل زاوية ب ا هـ وفى هذه الحالة تكون زاوية ب ا هـ = ب ا ح + ح ا هـ وحيث ان كل واحدة من هاتين الزاويتين تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها كانت زاوية ب ا هـ تقاس بنصف مجموع القوسين المذكورين أو بنصف القوس ب هـ المحصور بين ضلعيها

(الوضع الثالث) أن يكون المركز خارجا عن انفراج الزاوية مثل زاوية ب ا ى وفى هذه الحالة تكون هذه الزاوية هى الفرق بين الزاويتين ح ا ى و ح ا ب وتقاس حينئذ بنصف القوس ب ى وهو الفرق بين القوسين ح ى و ح ب

(الوضع الرابع) أن يكون أحد ضلعى الزاوية مماسا للمحيط مثل الزاوية هـ ا ع فان معيارها

لايزال مساويا لنصف القوس ا ء هـ وذلك لانه اذا فرض أن الزاوية المفروضة هى زاوية هـ ا ء ثم فرض أن الضلع هـ ا ثابت وأن الضلع ا ء متحرك حول نقطة ا بحيث تقرب نقطة ء شيأ فشيأ من نقطة ا فان جميع الزوايا المتوالية الحادثة تقاس بانصاف الاقواس المحصورة بين أضلاعها وبالجملة فعندما تصل نقطة ء الى نقطة ا يكون معيار الزاوية هـ ا ع مساويا لنصف القوس ا ء هـ

وينتج من ذلك (شكل ٧٣)

أولا ــ ان الزوايا هـ ل ع و هـ ح ع و هـ ے ع و ء هـ ع التى رؤسها على المحيط وأضلاعها واصلة الى نهايتى قوس واحد تكون كلها متساوية لاشتراكها فى معيار واحد وهو نصف القوس هـ ا ع

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بطريقة مختصرة فيقال ان جميع الزوايا المرسومة فى قطعة واحدة كلها متساوية

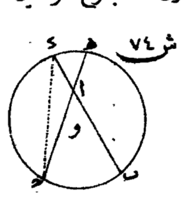
ثانيا ــ ان الزاوية ح ا ب التى رأسها بالمحيط وضلعاها ا ح و ا ب واصلان الى نهايتى القطر ب ح هى زاوية قائمة لان معيارها نصف القوس المحصور بين ضلعيها وحيث كان القوس مساويا لنصف محيط فيكون معيارها مساويا لربع محيط وحينئذ فكل زاوية مرسومة فى قطعة مساوية لنصف الدائرة تكون زاوية قائمة

ثالثا ــ ان الزاويتين المتقابلتين فى أى شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة متكاملتان لان مجموع معياريهما مساو لنصف محيط

نظرية

(٨٣) معيار الزاوية الداخلة أى التى رأسها بين المحيط والمركز يساوى نصف مجموع القوسين المحصور أحدهما بين ضلعيها والثانى بين امتدادهما أعنى أن زاوية

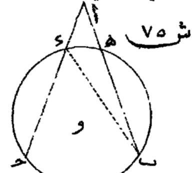
$\text{ب ا ح} = \frac{\text{ب ح} + \text{هـ ء}}{٢}$ (شكل ٧٤)



وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم ء ح فالزاوية ب ا ح الخارجة عن المثلث ا ء ح $= \text{ء} + \text{ح}$ أو $\text{ب ا ح} = \frac{\text{ب ح}}{٢} + \frac{\text{هـ ء}}{٢} = \frac{\text{ب ح} + \text{هـ ء}}{٢}$ وهو المطلوب

نظـــــــــرية

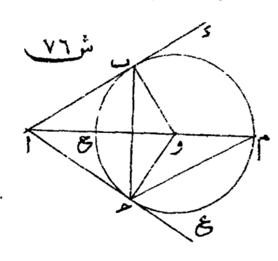
(٨٤) الزاوية الخارجة أى التى رأسها خارج المحيط تقاس بنصف الفرق بين القوسين المحصورين بين ضلعيها (شكل ٧٥)



أعنى أن زاوية ا ب ح = (ب ح − هـ ء) / ٢

وللبرهنة على ذلك يقال اذا وصل المستقيم ب ء حدث أن زاوية ب ء ح = ب + ا أو ا = ب ء ح − ب أو زاوية ا = ب ح / ٢ = هـ ء / ٢ = (ب ح − هـ ء) / ٢ وهو المراد

نتيجة ـ اذا كان أحد ضلعى الزاوية الخارجة أو كلاهما مماسا للمحيط فان معيار الزاوية لايزال مساويا لنصف الفرق بين القوسين المحصورين بين ضلعيها (شكل ٧٦)



فالزاوية ع ا م = (م ح − ح ع) / ٢

لانه اذا وصل ح م حدث

ع ح م = م + ا أو ا = ع ح م − م

أو ا = م ح / ٢ − ح ع / ٢ = (م ح − ح ع) / ٢

والزاوية ء ا ع = (ب م ح − ب ع ح) / ٢

وذلك لانه اذا وصل ب ح حدث أن

ء ب ح = ب ح ا + ا أو ا = ء ب ح − ب ح ا = ب م ح / ٢ − ب ع ح / ٢ = (ب م ح − ب ع ح) / ٢

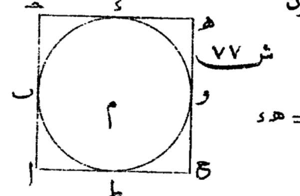
فائدة ـ بالتأمل فى (الشكل ٧٦) يعلم أن الزاويتين ء ب ح و ع ح ب متساويتان لتساويهما فى المعيار وحينئذ تكون الزاويتان ا ب ح , ا ح ب متساويتين ويكون المثلث ا ب ح متساوى الساقين والعمود النازل من رأسه على قاعدته يمر طبعا بوسطها وبناء عليه فانه لابد وأن يمر بالمركز ومن ذلك تنتج هذه القاعدة وهى

كل زاوية مرسومة خارج الدائرة وضلعاها مماسان لمحيطها فان جزأيهما المحصورين بين نقطتى التماس ورأسها متساويان وأن المستقيم المنصف لها يمر بمركز الدائرة ويكون عمودا على وسط الوتر الواصل بين نقطتى التماس

(نتيجة ١) كل نقطة مثل ا خارج محيط الدائرة و يمكن أن يمد منها مماسان له متساويان وذلك لانه اذا فرض أن ا ب مماس لمحيط الدائرة ووصل نصف القطر و ب كان ضرورة عمودا

على المماس ثم اذا تصورنا تدوير نصف المحيط الاعلى حول القطر م ع فان نقطة ب تنطبق طبعا على نقطة حـ ويأخذ المماس اب الوضع احـ وأما نصف القطر وب فانه يبقى دائما عموديا على اب فى أثناء الدوران ويأخذ الوضع وحـ العمودى على احـ وبذلك يكون احـ مماسا آخر وهو مساو اب كما تقدم

(نتيجة ٢) مجموع أى ضلعين متقابلين من أى شكل رباعى مرسوم على الدائرة يساوى مجموع الضلعين الآخرين منه (شكل ٧٧) أعنى يكون



احـ + هـع = اع + حـهـ

وذلك لان

اب = اط ، بحـ = حـد ، هـو = هـد
، وع = عط

وبجمع هذه المتساويات على بعضها يحدث

اب + بحـ + هـو + وع = اط + حـد + هـد + عط

أو احـ + هـع = اع + حـهـ وهو المطلوب

الفصل السادس

(فى الدعاوى العملية)

(٨٥) الغرض من حل أى مسئلة عملية بواسطة المسطرة والبرجل بيان توالى الاعمال التى تجرى بواسطة رسم الخطوط أو الدوائر ليعقبها حل المسئلة المفروضة

والسير العام الذى يجب اتباعه فى ذلك هو

أولا — أن يفرض أن المسئلة محلولة ويرسم الحل المطلوب

ثانيا — أن يبحث عن النقط التى تكفى معرفتها لاتمام الحل مع السهولة ونعتبر أنها مجهولة يطلب تعيينها ونجتهد دائما فى تقليل عددها على قدر الامكان حتى انها تجعل واحدة فقط ان أمكن ذلك

ثالثا — أن يجتهد فى أن يبرهن بناء على معالم المنطوق أو فروضه بأن كل واحدة من هذه النقط المجهولة اما موجودة على خطين مستقيمين معلومين يتأتى رسمهما واما على مستقيم ومحيط دائرة كذلك أو على محيطى دائرتين أيضا

رابعا ـ أن يجتهد فى ترجيع تعيين النقط المجهولة الى حلول مسائل تقدمت

ولنبدأ بحل بعض مسائل بسيطة يتوصل بها الى حل مقدار عظيم من المسائل الاُخر فنقول

فى رسم الخطوط المتعامدة

دعوى عملية

(٨٦) طريقة اقامة عمود على مستقيم معلوم يمر بوسطه (شكل ٧٨)

يفرض لذلك أن المسئلة محلولة وأن حـ هـ ء هو العمود المطلوب ثم يقال من المعلوم أن أى نقطتين مثل حـ و ء كافيتان لتعيينه وحيث انه محل هندسى للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ا و ب فكل نقطة مثل حـ توجد فى تقاطع محيطى الدائرتين المتساويتين اللتين مركزاهما ا و ب ومثلها نقطة ء ولما كان من اللزوم تقاطع محيطى الدائرتين فيكون

ش ٧٨

اب < احـ + بحـ أو اب < ٢احـ أو احـ > $\frac{اب}{٢}$

ومن ذلك تنتج طريقة الحل وهى

بجعل نهايتا المستقيم المعلوم مركزين وبنصف قطر أكبر من نصفه يرسم محيطا دائرتين متقاطعان فالوتر المشترك بينهما يكون هو العمود المطلوب

نتيجة ـ يمكن استعمال عين هذه الاعمال فيما اذا أريد تنصيف مستقيم معلوم

دعوى عملية

(٨٧) طريقة مد مستقيم عمودى على آخر معلوم من نقطة مفروضة ـ وللنقطة عدة أوضاع

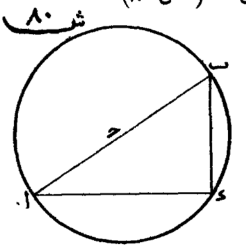
الاول ـ اذا كانت النقطة ء المعلومة موجودة على المستقيم اب (شكل ٧٩) وفرض أن المسئلة محلولة وأن ءحـ هو العمود المطلوب يلزم أن نبحث عن تعيين نقطة أخرى من نقط العمود المطلوب ولتكن حـ مثلا

ش ٧٩

وللوصول الى ذلك يقال لو أخذ البعدان د ا و د ب بجانبي نقطة د بحيث يكونان متساويين لو جدت نقطة ح المطلوبة على بعدين متساويين من هاتين النقطتين وبناء عليه فتوجد فى تقاطع محيطى الدائرتين المتساويين اللتين مركزاهما ا و ب بنصف قطر كاف لتقاطعهما ومن ذلك تنتج طريقة الحل الآتية وهى

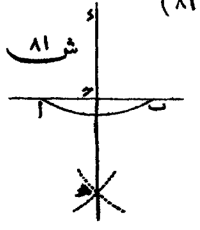
يؤخذ بجانبي نقطة د بعدان متساويان د ا و د ب ثم تجعل كل واحدة من النقطتين ا و ب مركزا و بنصف قطر أكبر من ا د يرسم قوسان من محيطى دائرتين فيتقاطعان فى نقطة مثل ح ثم يوصل ح د فيكون هو العمود المطلوب

الثانى ـ اذا وجدت نقطة د على نهاية مستقيم لا يمكن مده (شكل ٨٠)



ففى هذه الحالة لا يمكن اجراء الاعمال السابقة لكنه اذا فرض أن المسألة محلولة وأن ب د هو المستقيم العمودى على ا د لزم البحث عن نقطة من نقط هذا العمود ولتكن نقطة ب ولذلك يقال من المعلوم أنه لو كانت نقطة ب معلومة ووصل منها الى نقطة ا احدى نقط المستقيم ا د فانه يتكون من هذا المستقيم الموصول ومن المستقيم المعلوم ومن العمود المطلوب مثلث قائم الزاوية فى د وحينئذ اذا اعتبر المستقيم ا ب قطرا ورسم عليه محيط دائرة فانه يمر ضرورة بنقطة د وذلك لان زاوية د لما كانت قائمة ومعيارها ربع محيط فلا بد أن يكون رأسها على المحيط ومما ذكر تستنتج قاعدة الحل هذه تؤخذ نقطة ما اختيارية مثل ح خارج المستقيم ا د ثم تجعل مركزا و بنصف قطر مساو ح د يرسم محيط دائرة يقطع ا د فى نقطة ا فاذا وصل ا ح ومد على استقامته حتى يقطع محيط الدائرة فى نقطة ب تكون هى نقطة ثانية من العمود و يكون ب د هو العمود المطلوب

الثالث ـ اذا فرضت نقطة د خارج المستقيم ا ب (شكل ٨١)



وأن د ح هـ هو العمود المطلوب

فلتعيين نقطة أخرى من نقط العمود مثل نقطة هـ تجعل نقطة د مركزا و بنصف قطر ما يرسم قوس محيط دائرة بحيث يقطع المستقيم المعلوم فى نقطتين مثل ا و ب وحينئذ تكون نقطة هـ المطلوب تعيينها موجودة على بعدين متساويين من نقطتى ا و ب وتتعين اذن

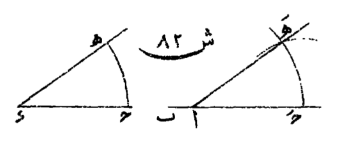
كما تقدم بتقاطع قوسى محيطى دائرتين متساويتين مرسومتين بالنقطتين ا و ب ومن ذلك تنتج طريقة الحل هذه

تجعل نقطة د مركزا وبنصف قطر كاف يرسم قوس محيط دائرة يقطع المستقيم المعلوم فى نقطتين مثل ا و ب ثم تجعل كل واحدة من هاتين النقطتين مركزا وبنصف قطر أكبر من نصف اب يرسم قوسان من محيطى دائرتين فيتقاطعان فى نقطة مثل هـ ويكون د حـ هـ هو العمود المطلوب

فى رسم الزوايا

دعوى عملية

(٨٨) طريقة مد مستقيم يصنع مع آخر معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوى زاوية معلومة (شكل ٨٢)



لتكن د هى الزاوية المعلومة و ا هى النقطة المفروضة على المستقيم ب حـَ فنفرض أن المسئلة محلولة وأن المستقيم اهـَ هو المستقيم المطلوب فيحتاج الامر حينئذ الى تعيين نقطة أخرى من هذا المستقيم مثل نقطة هـَ . وللوصول الى ذلك يقال

اذا جعل كل واحدة من النقطتين ا و د مركزا وببعد اختيارى رسم قوسا محيطى دائرتين متساويتين فمن حيث ان الزاويتين ا و د يجب أن تكونا متساويتين وهما مركزيتان فى دائرتين متساويتين فيكون قوساهما متساويين ووتراهما كذلك وحينئذ فتوجد نقطة هـَ فى تقاطع القوس حـَ هـَ بمحيط الدائرة الذى مركزه حـَ ونصف قطره مساو للوتر حـ هـ ومن ذلك تنتج طريقة الحل هذه

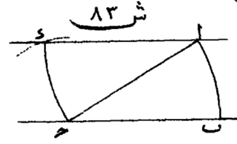
تجعل نقطة د مركزا وبنصف قطر اختيارى يرسم القوس حـ هـ ثم تجعل نقطة ا مركزا وبعين نصف القطر المذكور يرسم قوس غير محدود ثم تجعل نقطة حـَ مركزا وبنصف قطر مساو للوتر حـ هـ يرسم قوس آخر من محيط دائرة يقطع القوس حـَ هـَ فى نقطة هـَ فاذا وصل هـَ ا تكون زاوية هـَ ا حـَ هى الزاوية المطلوبة

فى رسم الخطـــوط المتـــوازية

دعوى عمليـــــة

(٨٩) طريقة مد مستقيم يوازى آخر معلوما من نقطة ما خارجة عنه

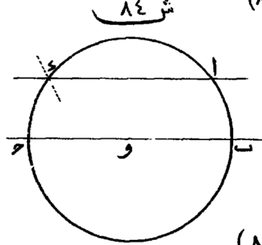
الحل الاول (شكل ٨٣)



اذا كانت ا هى النقطة المعلومة وكان ب ح هو المستقيم المعلوم وفرضنا ان المسألة محلولة وأن اء هو المستقيم الموازى المطلوب لزمنا تعيين نقطة أخرى مثل ء من المستقيم الموازى المذكور

وللوصول الى ذلك يقال اذا وصل بين نقطة ا المفروضة و بين احدى نقط المستقيم المعلوم ولتكن ح كانت زاوية احب مساوية لزاوية حاء لكونهما متبادلتين داخلتين وحينئذ فقد رجع الامر الى رسم زاوية حاء مساوية لزاوية احب كما مر فى نمرة ٨٨

الحل الثانى (شكل ٨٤)



اذا فرض أن المسألة محلولة وأن اء هو المستقيم الموازى المطلوب ثم رسم محيط دائرة مارا بنقطة ا وقاطعا للمستقيم ب ح فمن حيث ان القوس حء يجب أن يكون مساويا للقوس اب فيكون وتراهما كذلك وحينئذ فتتعين نقطة ء بتقاطع المحيط الاول بمحيط آخر مركزه نقطة ح ونصف قطره مساو لوتر القوس اب

الحل الثالث (شكل ٨٥)

يستعمل أحيانا لحل هذه المسئلة المثلث الخشبى وهو قطعة من الخشب الرقيق على هيئة مثلث احدى زواياه قائمة بواسطة انزلاقه على مسطرة بان يطبق أحد ضلعى القائمة من المثلث المذكور على المستقيم المعلوم وتطبق حافة المسطرة على الضلع الثانى للزاوية القائمة ثم تثبت المسطرة باليد ويزلق المثلث على حافتها حتى يمر الضلع الذى كان منطبقا على الضلع ب ح بالنقطة ا فاذا رسم مستقيم بطول حافة هـذا الضـلع كان موازيا للمستقيم ب ح لان الزوايا المتناظرة الحادثة من المستقيمين المذكورين ومن حافة المسطرة متساوية لكونها قائمة

فى تنصيف زاوية أوقوس معلوم

دعوى عمليـــــة

(٩٠) طريقة تنصيف زاوية أوقوس معلوم (شكل ٨٦)

ش ٨٦

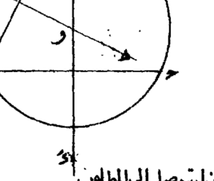
أولا ـ اذا فرض أن او ب هى الزاوية المعلومة وأن المسئلة محلولة وأن و ء ح هو المستقيم المنصف لها فاذا أريد تعيين نقطة أخرى من المستقيم المنصف يقال اذا جعلت نقطة و مركزا ورسم قوس بنصف قطر اختيارى فانه يقطع الضلعين او و وب فى نقطتين ويكون المستقيم المنصف مارا ضرورة بمنتصف القوس اب المحصور بين ضلعى الزاوية وعمودا على منتصف الوتر اب وحينئذ لتعيين نقطة ح من المستقيم المنصف يجرى العمل كما أجرى فى نمرة ٨٦

ثانيا ـ اذا فرض أن اب قوس معلوم يراد تنصيفه يقال اذا تصورنا وجود وتره فان العمود المقام على منتصفه يمر بمنتصف القوس أيضا وحينئذ فقد رجع الامر الى اجراء اعمال نمرة ٨٦

(٩١) لما كان يطلب أحيانا رسم محيط دائرة يمر بثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة أو تعيين مركز محيط دائرة أوقوس معلوم ناسب ذكر العملية الآتية

دعوى عمليـــــة

(٩٢) طريقة امرار محيط دائرة بثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة (شكل ٨٧)



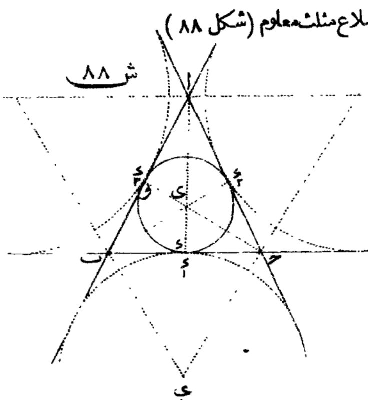
اذا كانت النقط الثلاثة هى ا و ب و ح وفرض أن المسئلة محلولة وأن اب ح هو محيط الدائرة المطلوب لزم البحث عن المركز و وللوصول الى ذلك يقال ان المركز المذكور يوجد على العمود القائم على وسط الوتر اب (٦٣ تنبيه) وكذا يوجد على العمود القائم على وسط الوتر ح ب ولما كان هذان العمودان لابد أن يتقاطعا (٤٩) فبناء عليه يرجع الامر الى اجراء اعمال نمرة ٨٦ مرتين ليتوصل الى المطلوب

نتيجـــة ـ اذا أريد تعيين مركز محيط دائرة معلوم أو مركز قوس معـلوم يؤخذ عليه ثلاث نقط وتجرى الاعمال السابقة

فى رسم المستقيمـات المماسة لمحيطات الدوائر

دعوى عمليـــــة

(٩٣) طريقة رسم محيط دائرة يمس أضلاع مثلث معلوم (شكل ٨٨)



ليكن ا ب ح هو المثلث المعلوم فاذا فرض أن المسئلة محلولة وأن نقطة ى هى مركز محيط الدائرة الذى يمس أضلاع المثلث فمن حيث ان المركز ى المذكور يجب أن يكون على بعـدين متساويين من الضلعين ا ب و ا ح فيوجد ضرورة على المستقيم المنصف لزاوية ا ولهذا السبب أيضا يوجد على المستقيم المنصف لزاوية ب واذن فهو موجود فى نقطة تلاقيهما

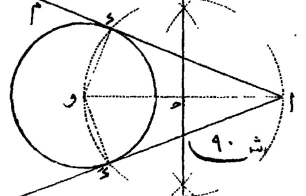
ثم اذا نصفت الزوايا الخارجة من المثلث فانه يتوصـل الى محيطات دوائر اخرى مماسة لامتدادات أضلاع المثلث الثلاثة

دعوى عمليـــــة

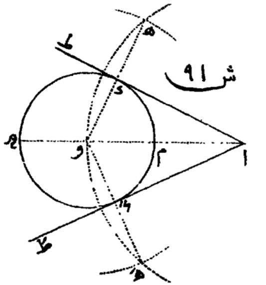
(٩٤) طريقة مد مستقيم مماس لمحيط دائرة من نقطة معلومة ولذلك حالتان

الحالة الاولى ـ اذا كانت النقطة المعـلومة ا موجودة على محيط الدائرة (شكل ٨٩) فمن حيث ان المماس الذى يمر بنقطة ا يجب أن يكون عمودا على نصف القطر المار بهذه النقطة التى هى نقطة التمـاس فقد آلت المسئلة الى الحالة الثانية من طريقة اقامة عمود على مستقيم من نقطة مفروضة نمرة ٨٧

الحالة الثانية – اذا كانت النقطة ا المعلومة موجودة خارج المحيط وفرض ان المسئلة محلولة وان ى هى نقطة التماس المجهولة (شكل ٩٠) أى التى يجب البحث عنها يقال حيث ان زاوية ا ى و يجب أن تكون قائمة فتكون مرسومة فى نصف محيط قطره ا و وحينئذ اذا رسم محيط دائرة على ا و فان نقطة ى توجد فى تقاطع هذا المحيط بمحيط الدائرة المعلومة



حل ثان – اذا كانت ا هى النقطة المفروضة (شكل ٩١) وان اى هو المماس المطلوب واريد تعيين نقطة التماس ى يمد نصف القطر و ى بمقدار ى هـ = ى و وحينئذ فمعرفة نقطة هـ تكفى لمعرفة نقطة ى غير أن نقطة هـ توجد على محيط الدائرة الذى مركزه و ونصف قطره مساو م ق وكذا توجد على محيط الدائرة الذى مركزه ا ونصف قطره ا و كما لا يخفى وبناء عليه فتوجد فى تقاطعهما



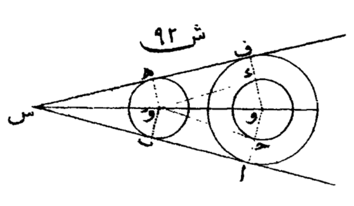
تنبيـــه – عندما تكون نقطة ا خارجة عن المحيط فانه يشاهد مع السهولة أولا توفر شروط تقاطع محيطى الدائرتين لان البعد بين المركزين فى كلا الشكلين ٩٠ و ٩١ هو أحد نصفى القطرين فيكون ضرورة أصغر من مجموعهما وأكبر من فاضلهما وثانيا وجود مماسين فى كل واحد من الحلين

دعوى عمليـــــــة

(٩٥) طريقة مد مماس لمحيطى دائرتين لذلك حالتان

الحالة الاولى – أن يكون التماس من الخارج (شكل ٩٢) فاذا كان و و وَ محيطى الدائرتين المراد مد مماس لهما من الخارج وفرض أن المسئلة محلولة وأن ا ب هو المماس المطلوب كان النقطتان ا و ب هما المقتضى تعيينهما

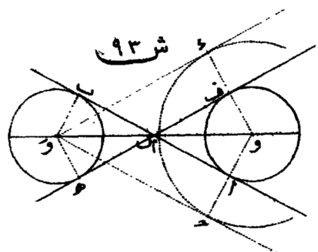
فاذاوصل وا و وَب ومدمن نقطة وَ المستقيم وَحـ موازيا للمستقيم اب حتى يقابل المستقيم أو فى نقطة حـ كان تعيين نقطة حـ كافيا لتعيين النقطتين ا و ب وذلك لانه اذاوصل وحـ ومدّعلى استقامته فانها تعين نقطة ا وكذا حيث ان كلا من وا و وَب عمود على وَحـ فيكونان متوازيين فاذامدّ حينئذ من نقطة وَ المستقيم وَب موازيا الى وا فانها تتعين أيضا نقطة ب



وللوصول الى تعيين نقطة حـ يقال اذا جعلت نقطة و مركزا وبنصف قطر يساوى وا ـــ وَب رسم محيط دائرة فانه يكون مماسا للمستقيم وَحـ العمودى على نصف القطر وا وحينئذ تتعين نقطة حـ بواسطة رسم مماس من نقطة وَ للمحيط وحـ الذى مركزه و ونصف قطره وا ـــ وَب وبالتأمل يعلم أن لهذه المسئلة حلين

الحالة الثانية ـ أن يكون التماس من الداخل (شكل ٩٣) ليكن حرفا و و وَ رمزين لمحيطى الدائرتين المعلومتين وان المستقيم اب مماساداخلا مشتركا بين المحيطين بفرض أن المسئلة محلولة

فيمدّ نصف القطرين المتوازيين وا و وَب ثم نبحث عن النقطتين ا و ب فاذا مدّ من نقطة وَ المستقيم وَحـ موازيا للمماس اب يشاهد أن تعيين نقطة حـ كاف لتعيين كل واحدة من النقطتين ا و ب فاذا جعلت نقطة و مركزا ورسم محيط دائرة



بنصف قطر مساوا الى وا + وَب فيكون مماسا للمستقيم وحـ وبناء عليه فانها تتعين نقطة حـ بواسطة مدّ مماس من نقطة وَ لمحيط الدائرة الذى مركزه و ونصف قطره مساوا الى مجموع نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين

ومن المعلوم أن المسئلة لا تكون ممكنة الا اذا كانت نقطة وَ خارجة عن المحيط المساعد أعنى يجب أن يكون و وَ = او > ر + رَ

وهذا يدل على ان المحيطين المعلومين اما أن يكونا متباعدين فى الخارج أو متماسين كذلك وفى الحالة الاولى يكون للمسئلة حلان وأما فى الثانية فليس لها سوى حل واحد فقط

فى رسم المثلثات

دعوى عملية

(٩٦) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محلولة وان اب ح هو المثلث المطلوب الذى علم منه زاوية ا والضلع بَ = اح والضلع حَ = اب فمن حيث ان الضلع اح معلوم فانه يوضع فى أى وضع على مستوى العمل ثم ترسم من نقطة ا احدى نهايتى اح زاوية حاب مساوية للزاوية المعلومة ثم يؤخذ على اب الطول اب = حَ المعلوم فاذا وصل ب ح فقد تم رسم المثلث

ش ٩٤

دعوى عملية

(٩٧) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلع والزاويتان المجاورتان له (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محلولة وان اب ح هو المثلث المطلوب الذى علم منه اَ = ب ح وزاويتى ب و ح فمن حيث ان اَ = ح ب فانه يوضع فى وضع ما فى مستوى العمل ثم يرسم من النقطتين ح و ب زاويتان مساويتان للزاويتين المعلومتين فنقطة ا التى يتقاطع فيها المستقيمان الممدودان يتم بها رسم المثلث

(تنبيه ١) المسئلتان السابقتان لايمكن أن يكون لهما غير حل واحد بناء على نظريات تساوى المثلثات المتقدمة

(تنبيه ٢) اذا لم تعلم الزاويتان المتجاورتان ح و ب للضلع المعلوم اَ بل علمت الزاويتان ا و ح مثلا يلزم قبل كل شئ الحصول على الزاوية ب بواسطة طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من قائمتين

دعوى عمليـــــة

(٩٨) طريقة رسم المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة (شكل ٩٤)

اذا فرض أن المسئلة محلولة وأن ا ب ح هو المثلث المطلوب الذى علم منه آ = ب ح
و بَ = ا ح , حَ = ا ب

فمن حيث ان الضلع آ = ب ح معلوم فانه يوضع فى أى وضع فى مستوى العمل ثم يقال ان نقطة ا
توجد ضرورة فى تقاطع محيطى الدائرتين اللتين مركزاهما ب و ح ونصفا قطريهما هما حَ و بَ

(تنبيه ١) يوجد للمسئلة حلان حيث ان محيطى الدائرتين يتقاطعان فى نقطتين غير أن
هذين الحلين متطابقان لكونهما متساويين حيث تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لنظيره

(تنبيه ٢) يجب لامكان حل المسئلة أن يتقاطع محيطى الدائرتين أعنى انه يجب أن يكون
الضلع الاكبر من أضلاع المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما

دعوى عمليـــــة

(٩٩) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما (شكل ٩٥)

نفرض أن المسئلة محلولة وأن ح ا ب هو المثلث
المطلوب الذى علم منه بَ = ا ح , آ = ب ح
و ا = ح ا ب ثم نقول من حيث ان زاوية ا
معلومة فتؤخذ نقطة ما ولتكن ا على مستقيم غير
محدود ا ب ويعد منها مستقيم ا ح يصنع
مع ا ب زاوية مساوية للزاوية ا ثم يؤخذ على
ا ح طول مساو للضلع بَ المجاور للزاوية ا

ولاجل تكميل رسم المثلث يكفى تعيين الرأس الثالثة ب غير أن هذه النقطة توجد فى آن واحد
على الضلع ا ب وعلى محيط الدائرة الذى مركزه ح ونصف قطره مساو آ

تنبيه ــ من المفيد مناقشة الاحوال الممكنة لحل هذه المسئلة فنقول

أولا ــ من المعلوم ان المسئلة تكون غير ممكنة الحل اذا كان آ أصغر من العمود ح ب١
النازل من نقطة ح على المستقيم ا ب

ثانيا ـ اذا كانت زاوية ا حادة فان الضلع اَ يمكن أن يكون مساويا الى حـ ب وفى هذه الحالة يكون للمسئلة حل واحد وهو المثلث القائم الزاوية حـ ب ا أو يكون أكبر من حـ ب وأصغر من حـ ا وفى هذه الحالة يكون للمسئلة حلان مقبولان وهما المثلث حـ ء ا و حـ ءَ ا أو يكون أكبر من ءَ = حـ ا وفى هذه الحالة لا يكون للمسئلة الا حل واحد وهو المثلث حـ ءً ا لان المثلث حـ ب ا فيه زاوية منفرجة مكملة لزاوية ا المعلومة

ثالثا ـ اذا كانت زاوية ا قائمة وكان اَ أكبر من حـ ا فانه يتوصل الى حلين متطابقين

رابعا ـ اذا كانت زاوية ا منفرجة فلاجل أن تكون المسئلة ممكنة يجب أن يكون الضلع اَ أكبر من الضلع ءَ ولا يوجد الا حل واحد (شكل ٩٦)

وبالجملة فانه لا يوجد للمسئلة حلان الا فى حالة واحدة فقط وهى التى يكون فيها ا < ٩٠° و اَ < ءَ

فى رسم قطعة دائرة على مستقيم تقبل زاوية معلومة

دعوى عمليـــــــة

(١٠٠) طريقة رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة (شكل ٩٧)

لتكن ا حـ ب القطعة المطلوبة بفرض ان المسئلة محلولة فيجب اذن من تعيين المركز ولذلك يقال

اذا اقيم عمود على وسط ا ب فانه يمر ضرورة بالمركز و ثم اذا مد من نقطة ب المماس ب ط لمحيط الدائرة فالزاوية ط ب م المتكونة من المماس ب ط ومن الوتر ا ب تقاس بنصف القوس ا ب وتكون اذن مساوية للزاوية المطلوبة ومن هنا يؤخذ امكان رسم هذا المماس قبل رسم القطعة وحيث ان المركز و يوجد على العمود القائم من نقطة ب على المماس ب ط فيوجد اذن فى تقاطع مستقيمين يسهل رسمهما بناء على ما تقرر بنمرتى ٨٦ و ٨٧

الفصـــــل السـابـــع

تمـــــرينات

١ ـ المطلوب تعيين نقطتين على محيط دائرة معـلوم بحيث يكون بعـداهما عن نقطة معلومة خارجة عنه متساويين

٢ ـ المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر المتحدة فى نصف القطر والماسة لمسـتقيم معلوم

٣ ـ المطلوب امرار مماس لمحيط دائرة معلوم موازيا لمستقيم معلوم

٤ ـ ماهو المحل الهندسى لمراكز محيطات الدوائر الماسة لمستقيمين متقاطعين

٥ ـ المطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معـلوم يكون مماسا لمسـتقيمين معلومين سواء كانا متوازيين أو متقاطعين وذكر حالة عدم الامكان فى حالة توازى المستقيمين المعلومين

٦ ـ المطلوب امرار محيط دائرة يمس مستقيما معلوما فى نقطة معينة عليه مع شرط مروره بنقطة معـــــلومة

٧ ـ اذا فرض نقطتان بينهما بعد قدره ى والمطلوب أن يمر منهما مستقيمـان متوازيان يكون البعد بينهما مساويا م

٨ ـ المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقط المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم بمقدار معين

٩ ـ المطلوب تعيين المحل الهندسى لمراكز محيطات الدوائر المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم

١٠ ـ المعـلوم محيط دائرة ومسـتقيم والمطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معـين يكون مماسا لهما

١١ ـ المطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معين يقطع آخر معلوما فى نقطتين معينتين وذكر حالة عدم الامكان وعدد الحلول

١٢ ـ المعلوم نقطتان والمطلوب تعيين نقطة تكون متباعدة عن احداهما ببعد م وعن الثانية ببعد ى مع ذكر ما يتعلق بالاحوال الآتية وهى متى يكون للمسئلة حلان ومتى يكون للمسئلة حل واحد ومتى تكون غير ممكنة

١٣ ـ المطلوب البرهنـة على أنه اذا تماس محيطا دائرتين خارجا أو داخلا ومد من نقطة التماس قاطعان لهـما ثم وصـل بين نقطتى تقابلهما مع كل محيط بمستقيم فان هذين المستقيمين يصـيران متوازيين واذا لم يمـد من نقطة التماس الا قاطع واحـد ومد من نقطتى تقابله بالمحيطين مماسان يكون هذان المماسان متوازيين

١٤ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا فرضت نقطة داخل زاوية وأنزل منها عمودان على ضلعيها كان الشكل الرباعى الحادث يمكن أن يمر به محيط دائرة

١٥ ـ المطلوب البرهنة على أن شبه المنحرف الذى ضلعاه المنحرفان متساويان يمكن رسمه داخل محيط دائرة

١٦ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا وصل من رأس المثلث القائم الزاوية الى وسط وتره بمستقيم كان هذا المستقيم الواصل مساويا بالنصف الوتر

١٧ ـ اذا فرض مستقيمان متعامدان وفرض مستقيم ذو طول ثابت ينزلق عليهما والمطلوب معرفة محل أواسط أوتار المثلثات القائمة الزوايا المتكونة من ذلك

١٨ ـ اذا أنزل من رؤس المثلث أعمدة على أضلاعه ثم وصل بين مواقع هذه الاعمدة بمستقيمات فانه يطلب البرهنة على أن تلك الاعمدة منصفة لزوايا المثلث الحادث

١٩ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين للزاويتين الحادثتين من امتداد الاضلاع المتقابلة من شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة متعامدان

٢٠ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا مد وتران متقاطعان داخل دائرة فان مجموع القوسين المحصورين بين امتدادهما يكون مساويا لمجموع القوسين المحصورين بين القطرين الموازيين للوترين المذكورين

٢١ ـ المطلوب البرهنة على أن قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث قائم الزاوية يساوى الفرق الكائن بين مجموع الضلعين المحيطين بالقائمة و بين الوتر

٢٢ ـ المطلوب رسم المثلث المتساوى الساقين اذا علم منه

أولا ـ القاعدة وزاوية الرأس

ثانيا ـ زاوية الرأس والارتفاع

ثالثا ـ القاعدة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

٢٣ ـ المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه

أولا ـ الوتر وزاوية حادة

ثانيا ـ الوتر وأحد ضلعى القائمة

ثالثا ـ الوتر والارتفاع المناظر له

رابعا ـ أحد ضلعى القائمة والارتفاع المقابل للوتر

خامسا ـ أحد ضلعى القائمة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

٢٤ ـ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه نقط أوسط أضلاعه الثلاثة

٢٥ ـ المطلوب رسم المربع اذا علم قطره

٢٦ ـ المطلوب رسم المستطيل اذا علم أحد أضلاعه والزاوية الحادثة بين قطريه

٢٧ ـ المطلوب رسم المعين اذا علم قطراه

٢٨ ـ المطلوب رسم متوازى الاضلاع اذا علم ضلع منه وقطراه

٢٩ ـ المطلوب رسم شبه المنحرف المتساوى الساقين اذا علم منه

أولا ـ قاعدتاه وزاوية منه

ثانيا ـ قاعدتاه وارتفاعه

٣٠ ـ المطلوب رسم شبه المنحرف الكائن كيفما اتفق اذا علمت أضلاعه الاربعة

(تم الجزء الاول من التحفة البهية ويليه الجزء الثانى ان شاء الله تعالى)

(تمت الفهرست)


Bibliotheca Alexandrina
0519745